Universidade do Estado do Amazonas

Cálculo I – ESNMAT07

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existe cinco problemas, valendo um total de dez pontos. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: @matematicamonteiro

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6. (extra)	
Total	

Manaus, 27 de Abril de 2022

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**

01 (Vale 3,0 pontos) Dê uma definição para derivada de função. **Encontre** $\frac{dy}{dx}$ para as funções definidas abaixo:

a) $y = x^{2022} - 2022^x + \ln 2022$

b) $y = \frac{sen(\sec x)}{\ln(senx)}$

c) $sen(x+y) = y^2 \cdot \cos x$

Justifique!

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Definição: A derivada de uma função $f(x)$ é outra função $f'(x)$ definida como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left(\begin{array}{l}\text{inclinação da reta tangente a } y=f(x) \\ \text{em } (x, f(x))\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l}\text{taxa de variação} \\ \text{de } f \text{ em relação} \\ \text{a } x, \text{ em } x\end{array}\right).$$

Respostas (a): $\boxed{\frac{dy}{dx} = 2022\, x^{2021} - 2022^x \cdot \ln 2022}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^{2022}\right)' - \left(2022^x\right)' + \left(\ln 2022\right)'$$

$$= 2022\, x^{2021} - 2022^x \cdot \ln 2022 + 0$$

Respostas (b):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \cdot tg x \cos(\sec x) - sen(\sec x) \cdot \left(\frac{1}{sen x}\right) \cdot \cos x}{\left(\ln(sen x)\right)^2}$$

$$= \boxed{\frac{\sec x \cdot tg x \cdot \cos(\sec x) - cotg x \cdot sen(\sec x)}{\left[\ln(sen x)\right]^2}}$$

Respostas (c):

$$\cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2y \frac{dy}{dx} \cos x + - y^2 sen x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(x+y) - y^2 sen x}{\cos(x+y) - 2y \cos x}}$$

#

02 (vale 1,0 ponto) Encontre a equação da reta tangente para $f(x)=\sqrt{x}-3$ no ponto *(16,1)*.

Equação da reta tangente: $y=\frac{x}{8}-1.$

Justificativa: Como

- $f(16)=\sqrt{16}-3=1$
- $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(16)=\frac{1}{8}$

então $r_t: y-1=\frac{1}{8}(x-16)$

Ou seja,

$$\boxed{r_t: y=\frac{x}{8}-1.}$$

03 (vale 2,0 pontos) Utilizando **a Regra de L'Hospital**. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

Resposta (a) = 1

Justificativa:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen x}{x}}_{\text{IND.: } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

Resposta (b) = e

Justificativa:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}}\Big\}\ \text{IND.}\ \frac{0}{0}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\cancel{(-1/x^2)}}{\cancel{(-1/x^2)}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{1/x}_{0}}}=e^1=e.$$

Resposta (c) = -1

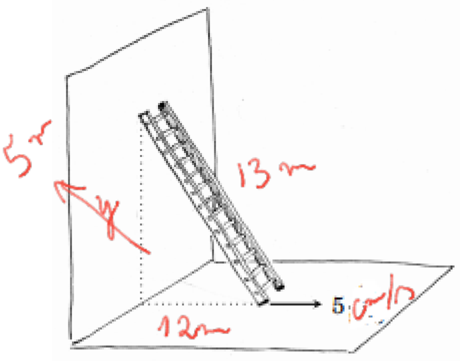
Justificativa:

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(1-1/x)}}_{\text{INDET.}:\ \frac{0}{0}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+1/x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{\left(\frac{1}{1-1/x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\underbrace{1/x}_{\to 0}}\right)\cdot(-1)}{\left(\frac{1}{1-\underbrace{1/x}_{\to 0}}\right)}$$

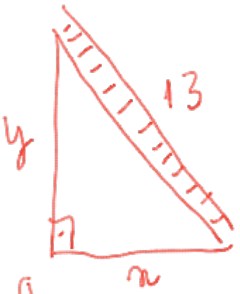
$$= -1.$$

04 (vale 2,0 pontos). Uma escada de 13 m está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma velocidade de 5 cm/s. Com que velocidade o topo da escada cai no momento em que a base da escada dista 12 m da parede? **Justifique!**



Resposta = -12 cm/s.

Justificativa:



- $\dfrac{dx}{dt} = 5$ cm/s
- $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=12m} = ?$

$\Downarrow$

$$x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=12} = \frac{-12\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}$$

$$= -12 \text{ cm/s}$$

05 (vale 2,0 pontos). **Enuncie** o Teorema do Valor Médio. **Encontre** um ponto c satisfazendo o Teorema do valor médio para a função dada por $f(x)=x^3$ em $[-4,5]$. **Justifique!**	**Teorema do valor Médio:** Seja f uma função tal que: (i) f é contínua em $[a,b]$ (ii) f é derivável em (a,b) Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. **Valor (es) de c:** $\boxed{\pm\sqrt{7}}$ **Justificativa:** Como f é contínua em $[-4,5]$ e derivável em $(-4,5)$ então existe $c \in (-4,5)$ tal que $f'(c)=\frac{f(5)-f(-4)}{5-(-4)}$. Logo, $3c^2=\frac{125+64}{9} \Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{\cancel{189}^{\cancel{63}\,7}}{\cancel{3\cdot 9}}} = \pm\sqrt{7} \in (-4,5)$.

06 (Extra: vale 2,0 pontos). Classifique em V (verdadeiro) ou F (Falso).

1. (F) Se uma função é ~~contínua~~ derivável em um ponto do seu domínio então também é ~~derivável~~ contínua neste ponto.

2. (F) ~~Aplicando a Regra de L´ Hospital~~ não pode em $\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{x}$ ~~o resultado é igual a 1.~~ INDET: $\frac{1}{0}$ NÃO EXISTE! $x\to 0^- = -\infty$ $x\to 0^+ = +\infty$

$f'(x)=3x^2-6x$

3. (F) A função dada por $f(x)=x^3-3x^2+3$ tem ~~três~~ dois pontos críticos.

$f'(x)=4x-3x^2$

4. (F) A função dada por $f(x)=2x^2-x^3$ apresenta ~~dois~~ um pontos de inflexão. $f''(x)=\boxed{6x-4}$

5. (V) A função dada por $f(x)=x^3-3x^2+3$ é crescente em $(-\infty,0]\cup(2,+\infty]$.

$-\infty$ ↗ cresc. 0 ↘ decresc. 2 ↗ cresc. $+\infty$; $3x^2-6x$

A Matemática é um testemunho da fidelidade e do poder de Deus. (V) ✓