UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA
ESCOLA NORMAL SUPERIOR - ENS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Soluções da 2ª Prova Parcial de Álgebra – Curso de Férias – 2017/3

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. (vale 1,0 pontos) Defina Núcleo de um Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos.

Uma solução:

Núcleo de um Homomorfismo: Sejam $(G,*)$ e $(J,\otimes)$ grupos e a aplicação $f:(G,*)\to(J,\otimes)$ um homomorfismo. O núcleo de f é o conjunto formado por todos os elementos do de G que são aplicados na identidade de J.

$$N(f)=\{x\in G;\ f(x)=e_J\}$$

Isomorfismo de Grupos: Uma aplicação $f:(G,*)\to(J,\otimes)$ é chamada de Isomorfismo quando $f(x*y)=f(x)\otimes f(y)$ para quaisquer $x,y\in G$ e além disso f é uma bijeção.

02. Seja a aplicação $f:(Z_{16},+)\to(Z_{16},+)$ definida por $f(x)=\bar{4}x$.

i) (vale 1,5 pontos) Mostre que f é um homomorfismo.

Uma solução:

$$x,y\in Z_{16}\Rightarrow f(x+y)=\bar{4}(x+y)=\bar{4}x+\bar{4}y=f(x)+f(y)\Rightarrow f\ \ \text{é}\ \ \text{um homomorfismo}.$$

ii) (vale 1,5 pontos) Encontre $Ker(f)$. $(Obs.: |Ker(f)|=4)$

Uma solução:

$$x\in Z_{16}\ \ e\ \ f(x)=0\ \Rightarrow\ \bar{4}x=0\ \Rightarrow\ x\in\{\bar{0},\bar{4},\bar{8},\overline{12}\}\ \Rightarrow\ Ker(f)=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8},\overline{12}\}.$$

03. (vale 1,5 pontos) Seja $f:(G,*)\to(J,\otimes)$ um homomorfismo de grupos, e_G e e_J as identidades de G e J, respectivamente. Prove que $f(e_G)=e_J$.

Uma solução:

$$\begin{cases} f(e_G)=f(e_G*e_G)=f(e_G)\otimes f(e_G) \\ f(e_G)=f(e_G)\otimes e_J \end{cases}\ \Rightarrow\ f(e_G)\otimes f(e_G)=f(e_G)\otimes e_J\ \Rightarrow\ f(e_G)=e_J.$$

04. (vale 1,5 pontos) Seja $f:(G,*)\to(J,\otimes)$ um homomorfismo de grupos. Prove que f é um monomorfismo se, e somente se, $\ker(f)=\{e_G\}$.

Uma solução:

$(\Rightarrow)$

Temos que $\{e_G\}\subset Ker(f)$, pois $f(e_G)=e_J$. Reciprocamente se $x\in Kerf(f)$ então

$$f(x)=e_J \Rightarrow f(x)=f(e_G) \overset{hip.}{\Rightarrow} x=e_G \Rightarrow x\in\{e_G\}.$$

Logo, $\ker(f)=\{e_G\}$.

$(\Leftarrow)$

Sejam $x,y\in G$.

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) &\Rightarrow f(x)\otimes[f(y)]' = f(y)\otimes[f(y)]' \\ &\Rightarrow f(x)\otimes f(y')=e_J \\ &\Rightarrow f(x*y')=e_J \\ &\Rightarrow x*y'\in Ker(f) \\ &\overset{hip.}{\Rightarrow} x*y'=e_G \\ &\overset{*y}{\Rightarrow} x=y \end{aligned}$$

Logo, f é um monomorfismo.

05. Seja a aplicação $f:(C^*,\cdot)\to(C^*,\cdot)$ definida por $f(z)=z^4$.

i) (vale 1,5 pontos) Mostre que f é um homomorfismo.

Uma solução:

$$z_1,z_2\in C^* \Rightarrow f(z_1\cdot z_2)=(z_1\cdot z_2)^4=z_1{}^4\cdot z_2{}^4=f(z_1)\cdot f(z_2)\Rightarrow f \ \text{ é um homomorfismo}$$

ii) (vale 1,5 pontos) Encontre $Ker(f)$. $(Obs.: |Ker(f)|=4)$

Uma solução:

$$z\in C^* \ e \ f(z)=1 \Rightarrow z^4=1 \Rightarrow z\in\{\pm1,\pm i\} \Rightarrow Ker(f)=\{-1,1,i,-i\}$$