Professor: Alessandro Monteiro

Curso: Introdução à Análise

Lista 1: PBO, PIM, Conjuntos Finitos, Infinitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis

1. Enuncie o Princípio da Boa Ordenação.

   1.1. Prove que não existe número natural n tal que $1 < n < 2$.

   1.2. Prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Enuncie e demonstre o Princípio de Indução Matemática para uma sentença $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

   2.1. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números complexos. Mostre que
   $$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

   2.2. Seja A um conjunto tal que $|A| = n$. Mostre que $|\wp(A)| = 2^n$.

   2.2.1. Se o número de subconjuntos binários (formados de dois elementos) de um conjunto dado é 15, quantos subconjuntos tem esse conjunto?

3. Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Mostre que:

   3.1. $n(B) - n(A) = 7$

   3.2. $n(B) + n(A) \geq 9$

4. Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. Mostre que o número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é igual a 247.

5. Mostre que $PIM \Rightarrow PBO$.

6. Defina Conjunto Finito.

   6.1. Prove que o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

7. Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ chama-se *limitado* quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq n$ seja qual for $n \in X$. Mostre que se $X \subset \mathbb{N}$ é finito e não-vazio então X é limitado.

8. Sejam X e Y conjuntos finitos e $f : X \to Y$. Prove que:
   8.1. Se f é injetiva então $|X| \leq |Y|$.
   8.2. Se f é sobrejetiva então $|X| \geq |Y|$.
   8.3. Se f é bijetiva então $|X| = |Y|$.

9. Dado um conjunto finito X, prove que uma função $f : X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva (e portanto uma bijeção).

10. Sejam X e Y conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente. Prove que:
    10.1. $\left|Fun(X,Y)\right| = n^m$.
    10.2. $\left|Inj(X,Y)\right| = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n \geq m$.

11. Seja X um conjunto finito com n elementos. Mostre que o conjunto de todas as funções $f : X \to X$ bijetivas é finito e possui $n!$ elementos. Isto é,

$$\left|Bij(X,Y)\right| = n!.$$

12. Defina Conjunto Enumerável e Conjunto Infinito Enumerável.
    12.1. Prove que $\mathbb{Z}$ é infinito enumerável.

13. (ITA - 2016/2017) Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe uma bijeção $f : X \to Y$.

II. Existe uma função injetora $g : Y \to X$.

III. O número de funções injetivas $f : X \to Y$ é igual ao número de funções sobrejetivas $g : Y \to X$.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma delas.
b) apenas I.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) todas.

14. (ITA - 2016/2017) Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \to A$ existem?