Professor: Alessandro Monteiro

Curso: Introdução à Análise

Lista 3: Sequências e Séries de Números Reais

1. Defina Sequência de Números Reais.
2. Defina sequência limitada.
3. Dadas as sequências:
   3.1. $(1,1,1,\ldots,1,\ldots)$
   3.2. $(1,2,3,\ldots,n,\ldots)$
   3.3. $(1,0,1,0,\ldots)$
   3.4. $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)$
   3.5. $(1,-1,1,-1,\ldots)$
   3.6. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\ldots\right)$
   3.7. $(2,2,2,0,0,0,0,\ldots)$

   Quais são limitas? Justifique.

4. Encontre (se possível) uma fórmula para representar as sequências do item anterior.
5. Defina sequência crescente, decrescente, não-decrescente e não-crescente.
6. Defina sequência monótona.
7. Quais sequências do exercício 3 são monótonas? Justifique.
8. Defina subsequência. Encontre duas subsequências para a sequência do item 3.5.
9. Defina sequência Convergente.
10. Defina sequência não convergente.
11. Mostre pela definição que a sequência $x_n = \frac{n}{n+17}$ converge para o número 1.
12. Mostre pela definição que a sequência $x_n = \frac{7n}{n + sen2n}$ converge para o número 7.
13. Prove que se uma sequência é convergente então o limite é único.
14. Prove que toda sequência convergente é limitada.
15. Prove que toda sequência monótona limitada é convergente.

16. Prove que se uma sequência x_n converge para um limite a, então qualquer subsequência de x_n também converge para a.
17. Dê exemplo de uma sequência limitada que não é convergente.
18. Sejam x_n e y_n sequências tais que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Prove que $\lim(x_n + y_n) = a + b$.
19. Quais das sequências do exercício 3 são convergentes? Justifique.
20. O que significa dizer que "x_n tende para mais (menos) infinito"?
21. Mostre pela definição que $\lim n = +\infty$.
22. Mostre pela definição que $\lim a^n = +\infty$, onde $a > 1$.
23. Defina sequência de Cauchy.
24. Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy.
25. Defina série de Números Reais.
26. Defina série convergente.
27. Defina Série divergente.
28. Mostre que a série $\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r r$ é divergente.
29. Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.
30. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ é divergente.
31. Encontre $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.
32. Dê um contraexemplo para a recíproca do resultado do exercício 29.