Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MN

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 100 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem quatro problemas, valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: ____________ Gabarito ____________

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

Manaus, 09 de Novembro de 2018

I. Questões	II. Respostas **à Caneta**
01 (vale 3,0 pontos). Defina sequência de Números Reais. Defina sequência convergente.	**Definição 1:** É uma função $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.
	Definição 2: Uma sequência de números reais x_n é dita ser convergente para um número real a se, e somente se, para todo real $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.
02 (vale 3,0 pontos). Prove ou dê contraexemplo: i) Toda sequência monótona é convergente. ii)Toda sequência convergente é de Cauchy.	i) Falsa! Contraexemplo: Seja a sequência $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então x_n tem a forma $(1,2,3,4,\ldots)$ que é monótona crescente, pois $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, é divergente, uma vez que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
	ii) Verdadeira! Prova: Seja x_n uma sequência convergente para um número real a, e $\varepsilon > 0$ qualquer. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \lvert x_n - a\rvert < \frac{\varepsilon}{2}.$ Se $m, n > n_0$ então $\begin{aligned} \lvert x_m - x_n\rvert &= \lvert x_m - a + a - x_n\rvert \\ &\leq \lvert x_m - a\rvert + \lvert x_n - a\rvert \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$ Logo, x_n é de Cauchy.

03 (vale 2,0 pontos). Mostre pela definição que a sequência $x_n = \dfrac{1}{2018^n}$ converge para o número 0.

Prova:

Seja dado $\varepsilon > 0$. Avaliemos:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2018^n} - 0\right| < \varepsilon \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{2018^n} < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{\varepsilon} < 2018^n\\ &\Leftrightarrow\; \log_{2018}\varepsilon^{-1} < n.\end{aligned}$$

Assim, tomando-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \log_{2018}\varepsilon^{-1}$ temos que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2018^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n = \dfrac{1}{2018^n} \to 0.$

04 (vale 2,0 pontos). Seja a série

$$\ln\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}.$$

i) Mostre que $S_n = \ln\dfrac{n+1}{3n+4}$.

ii) Conclua que $\ln\dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)} = \ln\frac{1}{3}$.

i) Temos que

$$\begin{aligned}S_n &= \ln\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{(k+1)(3k+1)}{k(3k+4)}\\ &= \ln 1 - \ln 4 + (\ln 8 - \ln 7) + \cdots + \ln(n+1) + \ln(3n+1) - \ln n - \ln(3n+4)\\ &= \ln 1 - \ln 4 + \cancel{\ln 2} + \ln 4 - \ln 1 \cancel{- \ln 7} + \ln 3 + \cancel{\ln 7} \cancel{- \ln 2} + \ln 10 + \cdots + \ln(n+1) + \cancel{\ln(3n+1)} \cancel{- \ln n} - \ln(3n+4)\\ &= \ln(n+1) - \ln(3n+4)\\ &= \ln\frac{n+1}{3n+4}.\end{aligned}$$

ii) Pelo item anterior, temos que

$$\ln\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{n+1}{3n+4}\right) = \ln\frac{1}{3}.$$