Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 100 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem quatro problemas, valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: ____________________________ Gabarito ______________________________

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

Manaus, 30 de Outubro de 2018

<table>
<tr><th>I. Questões</th><th>II. Respostas à Caneta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">01 (vale 3,0 pontos). Defina sequência de Números Reais. Defina sequência limitada.</td><td>Definição 1: É uma função $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.</td></tr>
<tr><td>Definição 2: Uma sequência de números reais x_n é limitada quando existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $|x_n|\le c$ para todo $n\in\mathbb{N}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">02 (vale 3,0 pontos). Prove ou dê contraexemplo:

i) Toda sequência limitada é convergente.

ii) Se $\lim x_n = 0$ e y_n é uma sequência limitada, então $\lim x_n \cdot y_n = 0$.</td><td>i) Falsa!

Contraexemplo: Seja a sequência $x_n = (-2018)^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Então x_n tem a forma $(-2018, 2018, -2018, 2018, \ldots)$ que é limitada pois $|x_n|\le 2018$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Mas, é divergente. A subsequência formada pelos termos de ordem ímpar converge para -2018 enquanto a formada pelos termos de ordem par converge para 2018.</td></tr>
<tr><td>ii) Verdadeira!

Prova: Seja dado $\varepsilon > 0$. Se $\lim x_n = 0$ então existe $n_0 \in\mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n| < \varepsilon .$$
Como y_n é uma sequência limitada, então existe $c\in\mathbb{R}^*$ tal que $|y_n|\le c$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, temos que, se $n > n_0$, então

$$|x_n y_n| = |x_n|\cdot|y_n| < \frac{\varepsilon}{c}\cdot c = \varepsilon .$$
Portanto, $\lim x_n \cdot y_n = 0$.</td></tr>
</table>

03 (vale 2,0 pontos). Mostre pela definição que a sequência $x_n = \dfrac{1}{\ln(n+2018)}$ converge para o número 0.

Prova:

Seja dado $\varepsilon > 0$. Avaliemos:

$$\left|\frac{1}{\ln(n+2018)} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{\ln(n+2018)} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < \ln(n+2018)$$

$$\iff e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 2018 < n.$$

Assim, tomando-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 2018$ temos que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\ln(n+2018)} - 0\right| < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n = \dfrac{1}{\ln(n+2018)} \to 0.$

04 (vale 2,0 pontos). Seja a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln\left(\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}\right)}{k(k+1)}.$$

i) Mostre que $s_n = -\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$.

ii) Conclua que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln\left(\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}\right)}{k(k+1)} = 0$. (Dica: lembre-se que $\sqrt[n]{n} \to 1$)

i) Temos que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{ln\left(\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}\right)}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln k}{k} - \frac{ln(k+1)}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln 2}{2}\right) + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

ii) Pelo item anterior, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln\left(\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}\right)}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\ln(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\ln \sqrt[n+1]{n+1}\right)$$

$$= -\ln 1$$

$$= 0.$$