Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

AP3

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem quatro problemas, valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: __________Gabarito__________

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	10,0

Manaus, 13 de Novembro de 2018

I. Questões	II. Respostas **à Caneta**
01 (vale 2,0 pontos). Defina séries de Números Reais. Defina séries convergentes.	**Definição 1:** Seja a_n uma sequência de números reais. A soma infinita $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ é chamada de série. A parcela a_n é chamada de termo geral da série e denotamos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ por $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$.
	Definição 2: Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita convergente quando a sequência de somas parciais $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ também é convergente. Isto é, quando existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{L}$. E, neste caso, $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{L}.$$
02 (vale 2,0 pontos). Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.	**Prova:** Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente então $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} s_n = L$. Como $s_n - s_{n-1} = a_n$ então $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= L - L \\ &= 0. \end{aligned}$$
03 (vale 4,0 pontos). Verifique se as seguintes séries convergem ou divergem. **Justifique!** **i)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2018}$;	**i)** Diverge, pois $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Veja: $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2018} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2018}{n}} = 1 \neq 0.$$
ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2018)^n$;	**ii)** Diverge, pois o limite do termo geral não existe.
iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2017^n}{2018^n}$	**iii)** Converge, pois $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2017^n}{2018^n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{2017}{2018}\right)^{m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2017}{2018}\left(\frac{2017}{2018}\right)^{m}$$ é uma série geométrica com valor absoluto da razão $\lvert q \rvert = \left\lvert \frac{2017}{2018} \right\rvert < 1$.

iv) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;	**iv)** Diverge, pois $$n \geq \sqrt{n} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$ e como a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente então pelo primeiro teste da comparação a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ também é divergente.
v) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+1}$;	**v)** Converge, pois $$3^n \leq 3^n+1 \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{1}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$ e como $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ é convergente, uma vez que é uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ então pelo primeiro teste da comparação a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+1}$ também é convergente.
04 (vale 2,0 pontos). Mostre, por definição, que a sequência $x_n = \frac{2n+1}{3n}$ é de Cauchy.	**Prova:** Seja dado $\varepsilon > 0$. Tomando-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e considerando-se $m > n$, temos $$\begin{aligned} m,n > n_0 &\Rightarrow m,n > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{m}{mn} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{m}{3mn} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{m-n}{3mn} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left\lvert \frac{n-m}{3mn} \right\rvert < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left\lvert \frac{6mn+3n-6mn-3m}{9mn} \right\rvert < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left\lvert \frac{3n(2m+1)-3m(2n+1)}{9mn} \right\rvert < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left\lvert \frac{2m+1}{3m} - \frac{2n+1}{3n} \right\rvert < \varepsilon \\ &\Rightarrow \lvert x_m - x_n \rvert < \varepsilon. \end{aligned}$$ Logo, $x_n = \frac{2n+1}{3n}$ é de Cauchy.