Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

PF

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem dois problemas, valendo um total de dez pontos e uma questão extra valendo dois pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: GABARITO

Questões	Pontos
1	
2	
3	
Total	

Manaus, 04 de Dezembro de 2018

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**
01 (vale 3,0 pontos). Análise as seguintes afirmações sobre sequências de números reais. Marque na coluna ao lado as que forem falsas e reescreva-as da forma correta. 1. O limite de uma sequência é único. 2. Toda sequência monótona é convergente. 3. Se uma sequência x_n converge para zero e y_n é uma sequência qualquer então $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$. 4. O limite da soma de duas sequências convergentes é igual à soma dos seus limites. 5. Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. 6. Toda sequência limitada é de Cauchy.	**Quais são as afirmações falsas?** 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 **Forma (s) correta (s):** 2. Toda sequência monótona e limitada é convergente 3. Se x_n converge para zero e y_n é uma sequência limitada então $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. 6. Toda sequência convergente é de Cauchy.
02 (vale 7,0 pontos). Verifique se as seguintes séries convergem ou divergem. **Justifique!** i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2018}}$	i) Converge, pois é uma p-série com $p>1$.
ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2018 \cdot n}$	ii) Converge, pois tomando-se $b_n = \frac{1}{2018n}$, temos que $b_{n+1} \leq b_n$, $b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \to 0$, e pelo Teorema de Leibniz, a série conv.
iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2017n}{2018n+1}$	iii) Diverge, pois $\lim a_n = \lim \frac{2017n}{2018n+1} = \frac{2017}{2018} \neq 0$.
iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}$	iv) Converge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{e}$ onde $\|q\| = \left\|\frac{1}{e}\right\| = \frac{1}{e} < 1$.

v) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$	**v)** Converge, pois $\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = \frac{1}{\log n} \to 0 < 1$, e pelo teste da raiz de Cauchy, a série converge.
vi) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot e^n}$	**vi)** Converge, pois $\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = \frac{1}{(n+1).\cancel{e^n}.e}\cdot n.\cancel{e^n} \to \frac{1}{e} < 1$, e pelo teste da razão de D'Alembert, a série converge.
vii) $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	**vii)** Diverge, pois $s_n = \cancel{\ln 1}^{\,0} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} + \dots - \cancel{\ln n} + \cancel{\ln n}$ $- \ln(n+1) = -\ln(n+1) \to -\infty$
03 (Extra: vale 2,0 pontos). Escolha na **questão 01** uma afirmação que seja verdadeira e **demonstre.**	**Afirmação:** O limite da soma de duas sequências convergentes é igual a soma de seus limites. **Demonstração:** Dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Se $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim y_n = b \in \mathbb{R}$ então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que i) $n > n_1 \Rightarrow \lvert x_n - a\rvert < \varepsilon/2$ ii) $n > n_2 \Rightarrow \lvert y_n - b\rvert < \varepsilon/2$ Tomando-se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos: $\lvert (x_n + y_n) - (a+b)\rvert \le \lvert x_n - a\rvert + \lvert y_n - b\rvert < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Logo, $\lim(x_n + y_n) = a + b$.