Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

Gabarito da AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem quatro problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: ______________________________Soluções______________________________

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	10,0

Manaus, 30 de Outubro de 2019

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**
01 (vale 0,25 pontos cada item). Analise cada sentenças abaixo e classifique em V, se for verdadeira, e F se for falsa: **I.** Todo subconjunto não vazio dos números naturais possui um elemento mínimo e um máximo. **II.** Um conjunto X é finito quando é vazio ou quando existe uma bijeção $f: I_n \to X$ para algum $n \in \mathbb{N}$. **III.** Sejam X e Y dois conjuntos com m e n elementos, respectivamente. Então $\lvert Fun(X,Y) \rvert = m^n$ e $\lvert Inj(X,Y) \rvert = \frac{n!}{(n-m)!}$, $n \geq m$. **IV.** Sejam X e Y dois conjuntos com m e n elementos, respectivamente. Então $\lvert Sobrej(X,Y) \rvert = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot i^m$, $m \geq n$. **V.** Um conjunto X é enumerável quando é infinito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to X$. **VI.** Todo subconjunto dos números reais, não vazio, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$. **VII.** Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são enumeráveis. **VIII.** O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo e também é não enumerável. **IX.** Se A e B são enumeráveis então $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$ não são enumeráveis. **X.** Se $x \in \mathbb{R}$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. **XI.** O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um corpo ordenado. **XII**. Se $a < b$ em $\mathbb{R}$ então $(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.	Respostas: **I.** (**F**) **II.** (**V**) **III.** (**F**) **IV.** (**V**) **V.** (**F**) **VI.** (**V**) **VII.** (**F**) **VIII.** (**V**) **IX.** (**F**) **X.** (**V**) **XI.** (**F**) **XII.** (**V**)
02 (vale 2,0 pontos). Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Prove que $x \leq 0$.	**Demonstração:** Seja $\varepsilon \in (0, +\infty)$ qualquer e x um número real tal que $x \leq \varepsilon$. Suponha que $x > 0$. Tomando-se $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ temos que $\varepsilon = \frac{x}{2} < x$. Uma contradição. Logo, $x \leq 0$.

03 (vale 2,0 pontos). Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados. Prove que

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

Demonstração: Sejam A e B subconjuntos dos reais não vazios e limitados, e $A+B = \{a+b;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$. Então existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \leq a$ e $y \leq b$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Assim, $x+y \leq a+b$ para todo $(a+b) \in A+B$. Ou seja, $A+B$ é limitado inferiormente. Como $\inf A \leq a$ e $\inf B \leq b$ sempre que $a \in A$ e $b \in B$ então $\inf A + \inf B \leq a+b$ para todo $(a+b) \in A+B$. Isto é, $\inf A + \inf B$ é uma cota inferior para $A+B$. Tomando-se um real $\varepsilon > 0$ qualquer, temos que existem a e b reais tais que $\inf A + \frac{\varepsilon}{2} > a$ e $\inf B + \frac{\varepsilon}{2} > b$.

Logo, $(\inf A + \inf B) + \varepsilon > a+b$ para algum $(a+b) \in A+B$. Portanto,

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

04 (vale 3,0 pontos). Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados.

i) Defina $\sup(A)$;

ii) Dê um contraexemplo para a igualdade

$$\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}.$$

i) Definição: Um número real s é chamado de supremo de A se s for a menor das cotas superiores de A. Isto é, $s = \sup A$ se:

i) $s \geq a\ \forall\ a \in A$;

ii) $r \in \mathbb{R}$ e $r \geq a\ \forall\ a \in A \Rightarrow r \geq s$.

ii) Contraexemplo: Tomando-se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$ temos que $A \cap B = \{1\}$.

Assim,

$$\sup(A \cap B) = 1 \neq 2 = \min\{2, 3\} = \min\{\sup A, \sup B\}.$$