Universidade do Estado do Amazonas

Cálculo I – ESNMAT07

Professor Alessandro Monteiro

Prova Final

Instruções aos alunos: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem somente três problemas valendo um total de dez pontos. **você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
Total	10,0

Manaus, 11 de Dezembro de 2019

I. Questões	II. Respostas à Caneta

01. (Vale 1,5 pontos cada item) Escolha **quatro entre as seis** integrais abaixo e resolva:

a) $\int \left(5e^{x} + 3\cos x - 5^{x}\right) dx$

b) $\int tgt \; dt$

c) $\int \ln x \, dx$

d) $\int \dfrac{x^2+1}{x^2-1} dx$

e) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} \, dx$

f) $\int \sec x \; dx$

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Resposta (a **):** $5e^{x} + 3\,\text{sen}\,x - 5^{x}/\ln 5 + C$

Justificativa:

$$\int (5e^{x} + 3\cos x - 5^{x})\,dx$$

$$= \int 5e^{x}\,dx + \int 3\cos x\,dx - \int 5^{x}\,dx$$

$$= 5e^{x} + 3\,\text{sen}\,x - \frac{5^{x}}{\ln 5} + C$$

Resposta (b **):** $-\ln|\cos t| + C$

Justificativa:

$$\int tg\,t\,dt = \int \frac{\overbrace{\text{sen}\,t\,dt}^{-du}}{\underbrace{\cos t}_{u}} = -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos t| + C$$

Resposta (C **):** $x(\ln x - 1) + C$

Justificativa:

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

Resposta (d **):** $x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C$

Justificativa:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{(x^2-1)+2}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

$$= x + \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{\underset{\text{menos}}{x-1}} \right) dx$$

$$= \boxed{x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C}$$

Resposta (f **):** $\ln|\sec x + tg x| + C$

Justificativa:

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + tg x)}{\sec x + tg x}\,dx$$

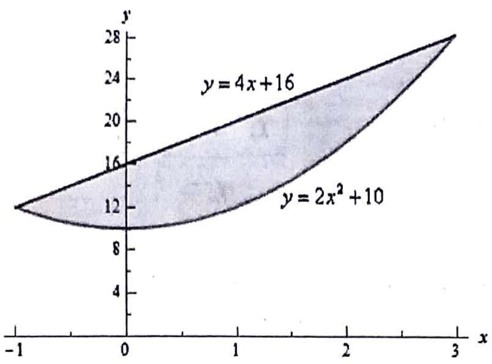
$$= \int \frac{\overbrace{\sec^2 x + \sec x\, tg x}^{du}}{\underbrace{\sec x + tg x}_{u}}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sec x + tg x| + C$$

02. (Vale 2,0 pontos) Encontre o valor da área destacada no gráfico abaixo:



Resposta: $64/3$

Justificativa:

$$A = \int_{-1}^{3} \left(4x+16-(2x^2-10)\right) dx$$

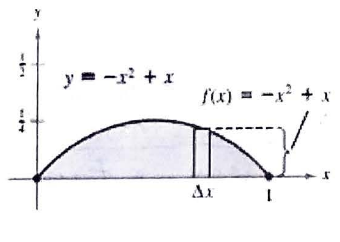
$$= \int_{-1}^{3} (-2x^2+4x+6)\,dx$$

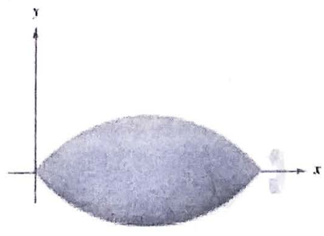
$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \cancel{-18} + \cancel{18} + 18 - \frac{2}{3} - 2 + 6$$

$$= 24 - \frac{8}{3} = \frac{72-8}{3} = \frac{64}{3}$$

03. (Vale 2,0 pontos) Encontre o volume do sólido formado pela revolução da região limitada pelo gráfico de $y=-x^2+x$ e o eixo x sobre o eixo x.





Resposta: $\frac{\pi}{30}$

Justificativa:

$$V = \pi \int_0^1 (-x^2+x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \pi \left(\frac{6-15+10}{30}\right) = \frac{\pi}{30}$$

E a vida eterna é esta: que te conheçam a ti, como o único Deus verdadeiro, e a Jesus Cristo, aquele que tu enviaste. (Jo 17.3)

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\, dx$

Resposta: $\ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C_1$

Justificativa: Fazendo-se a mudança de variável:

$$\boxed{x = 3\sec\theta \Rightarrow dx = 3\sec\theta\, tg\theta\, d\theta}$$

Assim, temos

$$= \int \frac{1}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}}\, 3\sec\theta\, tg\theta\, d\theta = \int \frac{1}{\cancel{3}\,\cancel{tg\theta}}\, \cancel{3}\cdot\sec\theta\, \cancel{tg\theta}\, d\theta$$

$$\overset{(f)}{=} \ln|\sec\theta + tg\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C_1$$