Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MW

Professor Alessandro Monteiro

PF

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem dois problemas, valendo um total de dez pontos e uma questão extra valendo dois pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
Total	

Manaus, 09 de Dezembro de 2019

I. Questões	II. Respostas à Caneta

01 (vale 3,0 pontos). Análise as seguintes afirmações sobre sequências e séries de números reais. Marque na coluna ao lado as que forem falsas e reescreva-as da forma correta.

1. Toda sequência x_n limitada e monótona crescente converge para o $\sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.
2. Toda sequência ilimitada é monótona.
3. Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, s_n converge para zero.
4. Seja $\sum (-1)^n \cdot a_n$ uma série com $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a_n é não crescente com limite igual a zero. Então $\sum (-1)^n \cdot a_n$ é divergente.

Quais são as afirmações falsas?

1	X 2	X 3	X 4

Forma (s) correta (s):

2. Nem toda sequência ilimitada é monótona. ($x_n = (-1)^n \cdot n$)

3. Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, s_n é limitada.

4. Seja $\sum (-1)^n \cdot a_n$ uma série com $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se a_n é não crescente com limite igual a zero. Então $\sum (-1)^n \cdot a_n$ é convergente.

02 (vale 1,0 ponto cada item). Verifique se as seguintes séries convergem ou divergem. **Justifique!**

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$

i) ( ) converge (X) diverge

Justificativa: Pois,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+n} \right) = 1 \neq 0.$$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

ii) (X) converge ( ) diverge

Justificativa: Pois é uma série geométrica com $\underbrace{|q|}_{\text{razão}} = \frac{1}{3} < 1$.

iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n+n}$

iii) (X) converge ( ) diverge

Justificativa: Pois,

$$\frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3^n}$$ e como $\sum \frac{1}{3^n}$ é convergente (item ii) então, pelo teste da comparação, $\sum \frac{1}{3^n+n}$ é convergente

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^3+4}$

iv) (X) converge ( ) diverge

Justificativa: É uma série alternada,

onde:

- $\frac{n^2}{n^3+4} \to 0$
- n^2/n^3+4 é não crescente e positiva

v) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$

v) (X) **converge** (   ) **diverge**

Justificativa:

Temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cancel{5^{n+1}}^{\,5}}{\cancel{(n+1)!}_{\,(n+1)}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{n+1}\right) = 0<1.$$

Logo, pelo Teste da razão, a série dada é convergente.

vi) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

vi) (X) **converge** (   ) **diverge**

Justificativa:

Temos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_1^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} t - \pi/4\right)$$

$$= \pi/2 - \pi/4 = \pi/4. \text{ (CONVERGE)}$$

Logo, a série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ é convergente.

vii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

vii) (X) **converge** (   ) **diverge**

Justificativa:

É uma série telescópica.

Onde:

- $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

- $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$$= \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\dots}$$

$$\cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \longrightarrow 1/2 \text{ (CONVERGE)}$$

Logo, a série dada converge para 1/2.

03 (Extra: vale 2,0 pontos). Defina conjunto aberto. Mostre que $X = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é aberto.

Definição:

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores. Isto é,

$\forall\, x \in X,\ \exists\, \varepsilon > 0;\ B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X.$

Demonstração:

Basta mostrarmos que existe $x \in X = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ temos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset X$. Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ então existe $r \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ para qualquer $x \in X$. Assim, para todo $x \in X$ temos que

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$