Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

PF

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem dois problemas, valendo um total de dez pontos e uma questão extra valendo dois pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
Total	

Manaus, 09 de Dezembro de 2019

I. Questões	II. Respostas à Caneta
01 (vale 3,0 pontos). Análise as seguintes afirmações sobre sequências e séries de números reais. Marque na coluna ao lado as que forem falsas e reescreva-as da forma correta. 1. Toda sequência limitada é de Cauchy. 2. Toda sequência limitada e monótona decrescente converge para zero. 3. Se $\sum a_n$ é uma série convergente então a_n converge para zero. 4. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum b_n$ é divergente então $\sum a_n$ é divergente.	**Quais são as afirmações falsas?** ~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ **Forma (s) correta (s):** 1. Toda sequência convergente é de Cauchy. 2. Toda sequência x_n limitada e monótona decrescente converge para 0 $L = \inf\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. 4. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum b_n$ é convergente então $\sum a_n$ é convergente.
02 (vale 1,0 ponto cada item). Verifique se as seguintes séries convergem ou divergem. **Justifique!** i) $\sum_{n=1}^{+\infty} n$	**i) ( ) converge (X) diverge** **Justificativa:** Pois $\lim a_n = \lim n \neq 0$ (+∞) ou ainda $S_n = \frac{(n+1).n}{2} \longrightarrow +\infty$ (S_n é divergente)
ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	**ii) (X) converge ( ) diverge** **Justificativa:** É uma p-série com $p = 2 \underset{\text{maior}}{\geq} 1$.
iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^5+3}$	**iii) (X) converge ( ) diverge** **Justificativa:** Temos que $\frac{n^3}{n^5+3} < \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (item ii) então, pelo teste da comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^5+3}$ também é convergente.
iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^3+4}$	**iv) (X) converge ( ) diverge** **Justificativa:** É uma série alternada onde i) $\frac{n^2}{n^3+4} \longrightarrow 0$ ii) $\frac{n^2}{n^3+4}$ é não crescente

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n+5}{5n+6}\right)^n$

v) (X) converge (   ) diverge

Justificativa: Pois, pelo teste da Raiz (Cauchy) temos que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4n+5}{5n+6} \longrightarrow 4/5 < 1.$$

Logo, a série dada converge absolutamente $\Rightarrow$ CONVERGENTE.

vi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$

vi) (   ) converge (X) diverge

Justificativa: Pois, pelo teste da integral, temos que

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\ln(\ln(x))\right)\Big|_2^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)\right)$$

$$= +\infty \quad (\text{DIVERGE})$$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{4n^2-1}$ $\quad \dfrac{2}{4n^2-1}$

vii) (X) converge (   ) diverge

Justificativa: É uma série telescópica. Onde:

- $$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}$$

- $$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$= \cancel{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1} \cancel{-\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{3}} \cancel{-\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{5}} \cancel{-\frac{1}{9}} + \cancel{\frac{1}{7}}$$

$$+ \cancel{\ldots} \cancel{-\frac{1}{2n-1}} + \cancel{\frac{1}{2n-3}} - \frac{1}{2n+1} + \cancel{\frac{1}{2n-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1}$$

- $S_n \longrightarrow 1$

03 (Extra: vale 2,0 pontos). Defina conjunto aberto. Mostre que $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$.	**Definição:** Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores. Isto é, $\forall\ x \in X,\ \exists\ \varepsilon > 0;\ B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$ **Demonstração:** (POR ABSURDO). Suponha que $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$. Então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $(q-\varepsilon, q+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$ para algum $\varepsilon > 0$. Como $(q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ é não enumerável então $\mathbb{Q}$ é não enumerável. Uma contradição. Logo, $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$.