Universidade do Estado do Amazonas

Cálculo I – ESN0282 – 2021/2 - Noturno

Professor Alessandro Monteiro

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem seis problemas, valendo um total de dez pontos, sendo que as quatro primeiras questões são obrigatórias, e você deverá escolher mais uma entre a questão cinco e a questão 6. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5 ou 6?	
Total	

Manaus, 31 de Março de 2022

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**

01 (Vale 3,5 pontos) Resolva cada um dos limites dados abaixo. **JUSTIFIQUE!**

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} (7+2\cos x)^{\frac{2}{3}}$.

b) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-6x+5}$.

c) $\lim\limits_{p\to2^+} \sqrt{2-p}+1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{-2022x}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{senx}{x}+\dfrac{1}{x-1}\right)$.

f) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{-x^2-2x+15}{|-x+3|}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+} \cos secx$.

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Resposta (a) = 4.

Justificativa:

$= (7+2\cos 60^\circ)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 4.$

Resposta (b) = 1/2.

Justificativa:

$= \lim\limits_{x\to5} \dfrac{(x-3)\cancel{(x-5)}}{(x-1)\cancel{(x-5)}} = \dfrac{5-3}{5-1} = \dfrac{1}{2}.$

Resposta (c) = $\nexists$.

Justificativa:

• $2-p\geq 0 \Rightarrow p\leq 2$

$\Rightarrow$ não está definida a direita de 2.

Resposta (d) = e^{2022}.

Justificativa:

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x}\right]^{2022} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2022}$

$= e^{2022}.$

Resposta (e) = 0.

Justificativa:

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0}\cdot\overbrace{\operatorname{sen} x}^{\text{limitada}} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0+0 = 0.$

Resposta (f) = 8.

Justificativa:

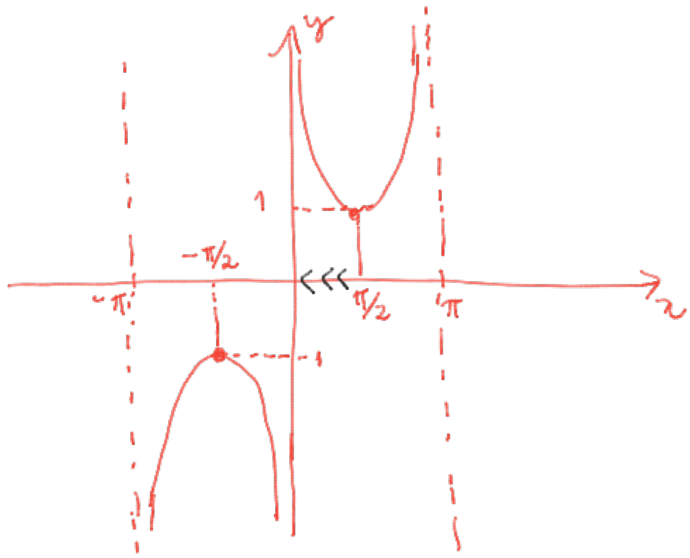
$$= \lim_{x \to 3} \frac{-(x^2+2x-15)}{-x+3} = \lim_{x \to 3} \frac{-\cancel{(x-3)}(x+5)}{-\cancel{(x-3)}}$$

$$= 3+5 = 8.$$

$\odot$ $|-x+3| = \begin{cases} -x+3, & x \leq 3 \\ -(-x+3), & x > 3 \end{cases}$

Resposta (g) = $+\infty$.

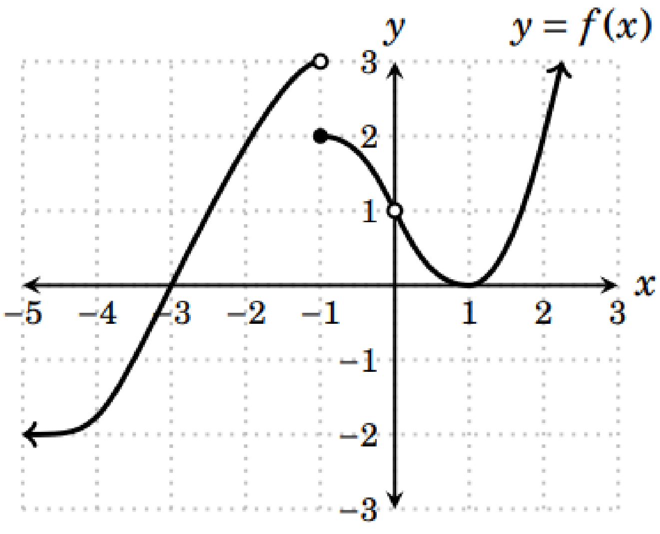
Justificativa:



• $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$

02 (vale 2,0 pontos) Observe os gráficos de f(x) e g(x), respectivamente, **e responda justificando todos os itens:**

Gráfico de f(x):



Resposta (a) = $\nexists$.

Justificativa:

Pois,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3 \neq 2 = \lim_{x \to -1^+} f(x).$$

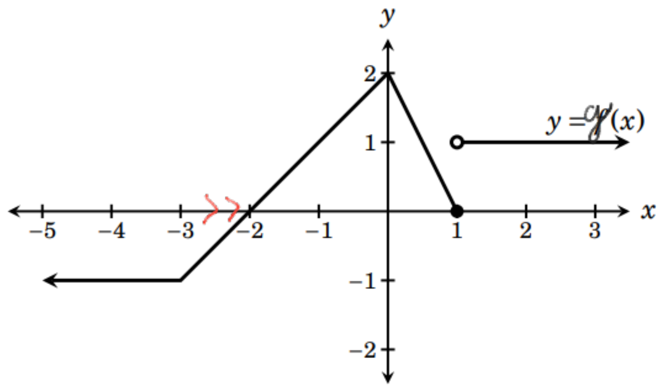
Resposta (b): Não.

Justificativa:

Pois,

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} g(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} g(x).$$

Gráfico de g(x):



a) $\lim_{x\to -1} f(x)$

b) g é contínua em x = 1?

c) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$

d) $\lim_{x\to -4} f(g(x))$

Resposta (c) = 0.

Justificativa:

Pois,

$x \to -2^-$ com valores menores que -2 e neste caso $g(x) \to 0$.

Resposta (d) = 2.

Justificativa:

$= f\left(\lim_{x\to -4} g(x)\right) = f(-1) = 2.$

03 (vale 2,0 pontos) Encontre as assíntotas horizontais e verticais da função definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3}$. Baseado nas assíntotas, quais os intervalos onde esta função é contínua?

Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!

Resposta:

$x = 1$ e $y = 1$.

Justificativa:

Assíntotas Verticais (A.V):

$$f(x) = \underbrace{\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)}}_{x\neq 3,\ x\neq 1} = \frac{x+2}{x-1}$$

$x \neq 3$

Vejamos:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$, pois

$x+2 \to 3$ e $x-1 \to 0$ com valores posit.

$\therefore x = 1$ é A.V.

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-1} = \frac{5}{2}$.

$\therefore x = 3$ não é A.V.

	Assíntotas Horizontais (A. H): ⊙ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ $\therefore y=1$ é A. H. ⊙ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1.$ $\therefore y=1$ é a única A.H. ⊙ f é contínua em: $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty).$
04 (Vale 1,5 ponto). Defina Limites de Funções. **Prove** pela definição "ε,δ" que $\lim\limits_{x\to 2023}(x-1)=2022$. **Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!**	Definição: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0;\ x\in D_f$ e $0<\lvert x-a\rvert<\delta \Rightarrow \lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon.$ Demonstração: Seja $\varepsilon>0$ qualquer. Escolhendo-se $\delta=\varepsilon>0$, temos: $0<\lvert x-2023\rvert<\delta \Rightarrow \lvert x-2023\rvert<\varepsilon$ $\Rightarrow \lvert (x-1)-2022\rvert<\varepsilon.$ Logo, $\lim\limits_{x\to 2023}(x-1) = 2022.$

05. (Vale 1,0 ponto) Mostre que existe um zero da função $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2$. **Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!**	**Solução:** Por ser $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2$ contínua em $[1,2]$ $f(1)=4.1^3-6.1^2+3.1-2=-1<0$ e $f(2)=4.8-6.4+3.2-2=12>0$, ou seja, $f(1)=-1<0<12=f(2)$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, deve existir $x_0\in(1,2)$ tal que $f(x_0)=0$.
06. (Vale 1,0 ponto) Defina derivada de função em um determinado ponto x_0 do seu domínio. Encontre, através desta definição, a derivada da função definida por $f(x)=x^3$ no ponto $x=1$. **Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!**	**Definição:** Dizemos que a derivada da função f no ponto x_0 é o limite $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$ se ele existir e for finito. **Derivada da função $f(x)=x^3$ no ponto $x=1$:** $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$ $$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1^3}{h}$$ $$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+3h+3.h^2+h^3-\cancel{1}}{h}$$ $$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3+3h+h^2)}{\cancel{h}}$$ $$=3+3.0+0^2=3.$$