I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO MARECHAL RONDON – I OMMR
GABARITO - PROVA – NÍVEL 3 – 15 DE NOVEMBRO DE 2015

01	B
02	D
03	A
04	E
05	C
06	C
07	B
08	A
09	C
10	C
11	A
12	A
13	B
14	E
15	E
16	A
17	D
18	D

I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO MARECHAL RONDON – I OMMR
GABARITO - PROVA – NÍVEL 3 – 15 DE NOVEMBRO DE 2015

19. (DISCURSIVA 1) Em um trapézio ABCD de bases $\overline{AB} = b$ e $\overline{CD} = B$, os lados não paralelos são AD e BC. Pelo ponto de concurso P das diagonais de ABCD, traçamos o segmento MN paralelo as bases, com $M \in AD$ e $N \in BC$.

a) Prove que P é o ponto médio de MN;

b) Prove que $\overline{MN}$ é igual à média harmônica de a e b, isto é prove que $\overline{MN} = \dfrac{2Bb}{B+b}$.

__Uma solução:__

a) Seja $\overline{MP} = x$ e $\overline{PN} = y$. Fazendo-se a altura do trapézio ABCD igual a h e a altura do triângulo ABP igual a t, então pela semelhança dos triângulos ABD e MPD temos que

$$\frac{x}{b} = \frac{h-t}{h}. \quad \textbf{(1)}$$

Como os triângulos ABC e PNC também são semelhantes, então

$$\frac{y}{b} = \frac{h-t}{h}. \quad \textbf{(2)}$$

Logo, de (1) e (2), temos que $x = y$. Ou seja, P é ponto médio de MN.

b) Usando o fato de que os triângulos ABP e PCD também são semelhantes, podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{B}{b} = \frac{h-t}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{t} = \frac{B}{b} + 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{h}{t} = \frac{B+b}{b} \\ &\Rightarrow \quad \frac{t}{h} = \frac{b}{B+b} \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad 1 - \frac{x}{b} = \frac{b}{B+b} \\ &\Rightarrow \quad \frac{x}{b} = 1 - \frac{b}{B+b} \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{Bb}{B+b}. \end{aligned}$$

Portanto, por (a), podemos dizer que $\overline{MN} = \dfrac{2Bb}{B+b}$.

I OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO MARECHAL RONDON – I OMMR
GABARITO - PROVA – NÍVEL 3 – 15 DE NOVEMBRO DE 2015

20. (DISCURSIVA 2) Sejam *a*, *b* e *c* números reais não nulos (com soma não nula) tais que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Prove que também se verifica:

$$\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}.$$

Uma solução:

Temos:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{ab}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Tomando-se $S=a+b$ e $P=ab$, temos também que:

$$\frac{S}{P}+\frac{1}{c}=\frac{1}{S+c} \quad \Rightarrow \quad \frac{Sc+P}{Pc}=\frac{1}{S+c}.$$

O que implica em $Sc^2+S^2c+SP=0.$ E disto temos dois casos a considerar:

i) Se $S=0$, então $a=-b$. Donde resulta que

$$\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}=\frac{1}{(-b)^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}=\frac{1}{c^{2015}},$$

e

$$\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{(-b)^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{c^{2015}}.$$

Ou seja, $\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}.$

ii) Se $S\neq 0$, então temos a equação $c^2+Sc+P=0$, cujas raízes são: $-a$ e $-b$. E de forma análoga ao item (i), sendo $c=-a$ ou $c=-b$, temos o resultado desejado.

Portanto, se *a*, *b* e *c* são números reais não nulos (com soma não nula) tais que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

Então

$$\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}.$$