matemáticamonteiro

Professor Alessandro Monteiro

Sequência de Números Reais

Definição → É uma função $x: N \to R$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Definição → É uma lista ordenada e infinita $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ onde para cada $n \in N$, x_n é um número real, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Subsequência → Uma subsequência y_n é a restrição da função x que define x_n a um subconjunto infinito $N_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$.

Definição ↕ Uma sequência y_n é chamada de subsequência de x_n se existe uma sequência estritamente crescente k_n de números naturais tal que $y_n = x_{k_n}$ para todo $n \in N$.

Definição → x_n é sequência de cauchy ⇕ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in N;\ m > n_o$ e $n > n_o \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$

Quando é monótona?

- Decrescente: $x_n > x_{n+1},\ \forall\, n \in N$
- Não crescente: $x_n \geq x_{n+1},\ \forall\, n \in N$
- Crescente: $x_n < x_{n+1},\ \forall\, n \in N$
- Não decrescente: $x_n \leq x_{n+1},\ \forall\, n \in N$

Quando é limitada? → $\exists\, c \in R;\ |x_n| \leq c,\ \forall\, n \in N$

Quando é convergente? ($\lim x_n = a$) → $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in N;\ n > n_o \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Quando é divergente?

- $\lim x_n = +\infty$ — Def. → $\forall\, M > 0\ \exists\, n_o \in N;\ n > n_o \Rightarrow x_n > M$
- $\lim x_n = -\infty$ — Def. → $\forall\, M > 0\ \exists\, n_o \in N;\ n > n_o \Rightarrow x_n < -M$
- $\forall\, a \in R,\ \forall\, m \in N,\ \exists\, \varepsilon > 0;\ n > m \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon$

Principais Teoremas →

1. O limite é único.
2. Toda sequência convergente é limitada.
3. Toda sequência monótona limitada é convergente.
4. Se a sequência converge então toda subsequência converge para o mesmo valor.
5. Se uma sequência x_n converge para zero e y_n é limitada então $\lim (x_n y_n) = 0$.
6. Se $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo natural n, $x_n \to a$ e $z_n \to a$, então $y_n \to a$.
7. O limite da soma (diferença) é igual a soma (diferença) dos limites.
8. O limite do produto é igual ao produto dos limites.
9. O limite do quociente é igual ao quociente dos limites ($\lim y_n \neq 0$)
10. Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.
11. Toda sequência convergente é de Cauchy.
12. Toda sequência de Cauchy é convergente.