matemáticamonteiro

Professor Alessandro Monteiro

Supremo e Infímo em R

(Supremo) Seja $A \subset R$ não-vazio e limitado superiormente. Um número $s \in R$ é dito o supremo de A ($s = \sup A$) se for a menor das cotas superiores de A. Isto é:

i) $s \geq a, \ \forall \ a \in A$;
ii) $r \in R$ e $r \geq a \ \forall \ a \in A \Rightarrow s \leq r$.

"equivalências para o item (ii)"

- Se $r < s$ então r não é uma cota superior de A;
- Se r é uma cota superior de A então $s \leq r$;
- Se $r < s$ então existe $a \in A$ tal que $r < a \leq s$;
- Se $\varepsilon > 0$ então existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a$;

Definições e Teoremas

Teoremas Importantes:

1. **(Propriedade Arquimediana)** Se $x \in R$ então existe $n \in N$ tal que $n > x$.
2. **(Densidade dos Racionais)** Se $a<b$ em R então $(a,b) \cap Q \neq \emptyset$.
3. **(Densidade dos Irracionais)** Se $a<b$ em R então $(a,b) \cap R\text{-}Q \neq \emptyset$.

(Ínfimo) Seja $B \subset R$ não-vazio e limitado inferiormente. Um número $m \in R$ é dito o ínfimo de B ($m = \inf B$) se for a maior das cotas inferiores de B. Isto é:

i) $m \leq b, \ \forall \ b \in B$;
ii) $n \in R$ e $n \leq b \ \forall \ b \in B \Rightarrow m \geq n$.

"equivalências para o item (ii)"

- Se $m < n$ então n não é uma cota inferior de B;
- Se n é uma cota inferior de B então $n \leq m$;
- Se $m < n$ então existe $b \in B$ tal que $m \leq b < n$;
- Se $\varepsilon > 0$ então existe $b \in B$ tal que $m + \varepsilon > b$;

Primeiros Exercícios:
Sejam $A, B \subset R$, não-vazios e limitados, e $\alpha \in R$. Então:

- $\sup A$ é único
- $\inf A$ é único
- $\inf A \leq \sup A$
- $\inf A = \sup A \Rightarrow A = \{\sup A\}$
- $\sup(\alpha + A) = \alpha + \sup A$
- $\inf(\alpha + A) = \alpha + \inf A$
- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$
- $A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$
- $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
- $\sup(-A) = -\inf A$
- $\inf(-A) = -\sup A$
- $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$
  $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$
- $\alpha \geq 0 \Rightarrow \sup(\alpha A) = \alpha \sup A$
- $\alpha \geq 0 \Rightarrow \inf(\alpha A) = \alpha \inf A$
- $\alpha < 0 \Rightarrow \sup(\alpha A) = \alpha \inf A$
- $\alpha < 0 \Rightarrow \inf(\alpha A) = \alpha \sup A$
- $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
- $\sup(1/A) = 1/\inf A$, $\inf A > 0$