Gabarito

3^a Avaliação de Aritmética - PROFMAT

Prof. Almir Neto/Prof. Alessandro Monteiro

Nome:

Questão 1. (2 pts) Sejam a e b inteiros.

(i) Defina o máximo divisor comum de a e b.

(ii) Mostre que se $mdc(a, b) = 1$, então $mdc(b + a, b - a)$ é 1 ou 2.

Questão 2. (2 pts) Sejam a e b inteiros positivos. Prove que se $4|ab$ mas $4 \nmid a$, então $2|b$.

Questão 3. (2 pts) Resolva:

(i) $5x + 15y = 17$.

(ii) Para ter acesso a um teatro no bairro do Prof. Alessandro é cobrado $R\$1,80$ para ingressos de adultos e $R\$0,75$ para crianças. Em uma determinada noite, as receitas totais foram de $R\$90,00$.Assumindo que mais adultos do que crianças estiveram presentes, quantas pessoas compareceram?

Questão 4. (2 pts) Mostre que se p é um primo ímpar, então $2(p-3)! \equiv -1(\text{mod } p)$.

Questão 5. (2 pts) Determine o resto da divisão por 19 do número

$$S = 1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + \ldots + 95^{18}.$$

Questão 6. (2 pts) Resolver o sistema de congruências lineares:

$$2x \equiv 1(\text{mod } 5)$$

$$3x \equiv 2(\text{mod } 7)$$

$$4x \equiv 3(\text{mod } 11).$$

OBS: ESCOLHER APENAS CINCO QUESTÕES.

Questão 1

(i) Definição: O número $d \geq 0$ é chamado de máximo divisor comum (mdc) dos inteiros a e b ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) se:

- $d|a$ e $d|b$, e
- se $c|a$ e $c|b$ então $c|d$, $c \in \mathbb{Z}$.

É comum usarmos a notação $mdc(a,b) = (a,b) = d$.

E por conveniência temos que $(0,0) = 0$.

(ii) Prova: $d = (b+a, b-a) \Rightarrow d|b+a$ e $d|b-a$

$\Rightarrow d|(b+a)+(b-a)$ e $d|(b+a)-(b-a)$

$\Rightarrow d|2b$ e $d|2a$

$\Rightarrow d|(2a, 2b)$

$\Rightarrow d|2\cdot(a,b)$

$\overset{(hip.)}{\Rightarrow} d|2\cdot 1$

$\Rightarrow d|2$

$\Rightarrow d = 1$ ou $d = 2$, pois $d \geq 0$.

$(2a, 2b) = 2\cdot(a, b)$

Nota:

$$\begin{cases} \odot\ (a,b) \mid a \text{ e } (a,b) \mid b \Rightarrow 2\cdot(a,b) \mid 2a \text{ e } 2\cdot(a,b) \mid 2b \\ \odot\ c \mid 2a \text{ e } c \mid 2b \Rightarrow \begin{cases} c \mid 2 \Rightarrow c \mid 2\cdot(a,b) \\ c \nmid 2 \Rightarrow c \mid a \text{ e } c \mid b \Rightarrow c \mid (a,b) \Rightarrow c \mid 2(a,b) \end{cases} \end{cases}$$

Questão 2

Prova: Sejam a e b inteiros positivos. Se $4 \mid ab$ então existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que $4.K = ab$. Isto é, $2.(2K) = ab$. Logo, $2 \mid ab$. Como 2 é primo, então $2 \mid a$ ou $2 \mid b$. Para o caso em que $2 \mid b$ não há o que fazer. Por outro lado, se $2 \mid a$ então $2.q = a$, com $q \in \mathbb{Z}$, e consequentemente $4K = 2q.b$. Ou seja, $2K = q.b$. Assim, $2 \mid q.b$, o que mais uma vez nos permite concluir que $2 \mid q$ ou $2 \mid b$. Entretanto, como por hipótese $4 \nmid a$, temos que q é ímpar e $2 \nmid q$. Portanto, $2 \mid b$.

Questão 03.

(i) Como $(5, 15) = 5$ e $5 \nmid 17$ então a equação $5x + 15y = 17$ não possui solução.

(ii) <u>Solução:</u> Considere x o número de adultos e y o número de crianças. Temos:

$$1{,}8x + 0{,}75y = 90 \Rightarrow 180x + 75y = 9000.$$

Como $(180,75) = (30,75) = (15,30) = 15$ e $15 \mid 90000$, uma vez que $90000 = 6 \cdot 15 \cdot 1000$, então a equação dada possui solução. Se dividirmos por 15 encontramos $12x + 5y = 600$. Assim, por ser $12 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 = 1$, temos a solução particular

$x_0 = -2 \cdot 600 = -1200$ e $y_0 = 5 \cdot 600 = 3000$. Logo,

$$x = -1200 + 5t \quad \text{e} \quad y = 3000 - 12t, \ t \in \mathbb{Z}.$$

Assumindo-se que $x > y \geq 0$, temos também:

$$t \leq \frac{3000}{12} = 250 \quad \text{e} \quad t > \frac{4200}{17} > \frac{4199}{17} = 247.$$

Logo, $t \in \{248, 249, 250\}$ e

$(x,y) \in \{(40, 24), (45, 12), (50, 0)\}$.

Portanto, a quantidade de pessoas que compareceram foi 64, 57 ou 50.

Questão 4

Prova: Como p é primo então pelo Teorema de Wilson temos que $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$. Como p também é ímpar podemos escrever que

$$(p-1)(p-2)(p-3)! \equiv -1 \bmod p.$$ Por ser $(p-1)(p-2) =$

$= p^2 - 3p + 2 \equiv 0 + 2 \bmod p$ então podemos concluir que $2(p-3)! \equiv -1 \bmod p$.

Questão 5.

Solução: Como $1^{18} \equiv 1 \bmod 19$, $19^{18} \equiv 0 \bmod 19$, $38^{18} \equiv 0 \bmod 19$, $57^{18} \equiv 0 \bmod 19$, $76^{18} \equiv 0 \bmod 19$, $95^{18} \equiv 0 \bmod 19$, e também pelo P.T.F as demais potências i^{18}, com $1 \leq i \leq 95$

sempre deixam resto igual a 1 na divisão por 19, então

$$S = 1^{18} + 2^{18} + \dots + 95^{18} \equiv 90 \bmod 19$$

$$\equiv 14 \bmod 19.$$

Portanto, o resto da divisão de S por 19 é igual a 14.

Questão 6:

solução: Temos:

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \bmod 5 & (\cdot 3) \\ 3x \equiv 2 \bmod 7 & (\cdot 5) \\ 4x \equiv 3 \bmod 11 & (\cdot 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 3 \bmod 7 \\ x \equiv 9 \bmod 11. \end{cases}$$

Como 5, 7 e 11 são primos entre si dois a dois. Então, pelo Teorema Chinês dos Restos, a solução mod(5.7.11) é dada por

$$x = 3.7.11.x_1 + 3.5.11.x_2 + 9.5.7.x_3 \quad \text{onde}$$

$7.11\, x_1 \equiv 1 \mod 5$, $5.11\, x_2 \equiv 1 \mod 7$ e

$5.7\, x_3 \equiv 1 \mod 11.$

Por ser

$$\begin{cases} 77 x_1 \equiv 1 \mod 5 \\ 55 x_2 \equiv 1 \mod 7 \\ 35 x_3 \equiv 1 \mod 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 x_1 \equiv 1 \mod 5 \\ -1 . x_2 \equiv 1 \mod 7 \\ 2 x_3 \equiv 1 \mod 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} x &\equiv 3.7.11.3 + 3.5.11.6 + 9.5.7.6 \mod 385 \\ &\equiv 3573 \mod 385 \\ &\equiv 108 \mod 385. \end{aligned}$$

Ou seja, $\boxed{x = 108 + 385K,\ K \in \mathbb{Z}.}$

Solução alternativa para a questão 2:

Prova (Rascunho):

- $\mathrm{mdc}(a,4) \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4, \ \underbrace{\text{não pois } 4 \nmid a}_{\text{hipótese}} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{mdc}(a,4) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

- $\mathrm{mdc}(a,4) = 1 \xRightarrow{\text{EUCLIDES}} 4 \mid b \xRightarrow{2 \mid 4} 2 \mid b.$

- $\mathrm{mdc}(a,4) = 2 \Rightarrow 2 \mid a \Rightarrow a = 2q$, q ímpar pois $4 \nmid a$

$$4 \mid ab \Rightarrow ab = 4\underbrace{t}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow \cancel{2}qb = \overset{2}{\cancel{4}}t$$

$$\Rightarrow 2 \mid qb$$

$$\Rightarrow 2 \mid b \ (q \text{ é ímpar})$$