Gabarito

3^a Avaliação de Aritmética - PROFMAT

Prof. Almir Neto/Prof. Alessandro Monteiro

Nome:

Instruções

- Escolher apenas cinco dentre as seis questões
- Cada questão escolhida vale dois pontos

Questão 1. Seja b um número natural maior que 1. Prove ou dê um contraexemplo:

(a) (Os números da forma $2022_b - 202_b$ são sempre divisíveis por 3.

(b) Nenhum número da forma $(111)_b$ pode ser um quadrado perfeito.

Questão 2. Seja $n \in \mathbb{Z}^*$ e p um número primo. Através da fórmula $E_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \cdots$, podemos encontrar a maior potência de p que aparece na fatoração de $n!$, onde o número $\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$ representa o quociente da divisão euclidiana de n por p^i, $i \geq 1$, que é o maior inteiro menor ou igual do que o número racional $\frac{n}{p^i}$.

(a) Qual é a maior potência de 3 que divide 22!

(b) Fatore 22! como um produto de números primos.

Questão 3. Sobre aplicações do máximo divisor comum:

(a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mostre que a equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $(a, b)|c$.

(b) Encontre todas as soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ da equação $7X + 19Y = 781$.

Questão 4. Ache o resto da divisão por 17 do número

$$S = 1^{16} + 2^{16} + \cdots + 85^{16}.$$

Questão 5. Mostre que se p e q são primos tais que $q = p + 2$ e $p > 3$, então $p + q \equiv 0 (\text{mod } 12)$.

Questão 6. Dispomos de uma quantia x reais menor do que 3000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra $R\$1,00$, se a distribuirmos entre 12 pessoas sobram $R\$2,00$ e se a distribuirmos entre 13 pessoas sobram $R\$3,00$. De quantos reais dispomos?

Questão 1. Seja b um número natural maior que 1. Prove ou dê um contraexemplo:

(a) (Os números da forma $2022_b - 202_b$ são sempre divisíveis por 3.

(b) Nenhum número da forma $(111)_b$ pode ser um quadrado perfeito.

a) Contraexemplo:

Para $b=4$ temos:

$$2022_4 - 202_4 = \cancel{2\cdot 4^0} + 2\cdot 4^1 + 2\cdot 4^3 - \cancel{2\cdot 4^0} - 2\cdot 4^2$$

$$= 8 + 128 - 32$$

$$= 104,$$

Mas, 104 não é divisível por 3.

b) Prova (por contradição):

Suponha que existam $b, x \in \mathbb{N}$ com $b>1$ tais que $111_b = x^2$. Como $111_b = b^2 + b + 1$ e,

$$b^2 < b^2 + b + 1 < b^2 + 2b + 1$$

então

$$b^2 < x^2 < (b+1)^2.$$

Isto é, $b < x < b+1$.

Uma contradição. Portanto, nenhum número da forma 111_b pode ser um quadrado perfeito.

Questão 2. Seja $n \in \mathbb{Z}^*$ e p um número primo. Através da fórmula $E_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \cdots$, podemos encontrar a maior potência de p que aparece na fatoração de $n!$, onde o número $\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$ representa o quociente da divisão euclidiana de n por p^i, $i \geq 1$, que é o maior inteiro menor ou igual do que o número racional $\frac{n}{p^i}$.

(a) Qual é a maior potência de 3 que divide 22!

(b) Fatore 22! como um produto de números primos.

a) Solução: Como

$$E_3(22!) = \left\lfloor \frac{22}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{3^3} \right\rfloor + \ldots$$

$$= 7 + 2 + 0 + \ldots = 9$$

então a maior potência de 3 que divide 22! é 3^9.

b) Solução: Temos que:

$$E_2(22!) = \left\lfloor \frac{22}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{2^4} \right\rfloor + \ldots = 19$$

$$E_3(22!) = 9$$

$$E_5(22!) = \left\lfloor \frac{22}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{5^2} \right\rfloor + \ldots = 4$$

$$E_7(22!) = \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{7^2} \right\rfloor + \ldots = 3$$

$$E_{11}(22!) = \left\lfloor \frac{22}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{11^2} \right\rfloor + \ldots = 2$$

$$E_{13}(22!) = \left\lfloor \frac{22}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{13^2} \right\rfloor + \ldots = 1$$

$$E_{17}(22!) = \left\lfloor \frac{22}{17} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{17^2} \right\rfloor + \ldots = 1$$

e

$$E_{19}(22!) = \left\lfloor \frac{22}{19} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{19^2} \right\rfloor + \ldots = 1$$

Logo, $22! = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

Questão 3. Sobre aplicações do máximo divisor comum:

(a) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mostre que a equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $(a, b)|c$.

(b) Encontre todas as soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ da equação $7X + 19Y = 781$.

a) Demonstração: Sejam $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ uma solução da equação $aX + bY = c$. Assim, $ax_0 + by_0 = c$. Como $(a,b)|a$ e $(a,b)|b$ então $(a,b)|ax_0 + by_0$. Logo, $(a,b)|c$. Por outro lado, se $(a,b)|c$ então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(a,b) \cdot k = c$. Pelo Teorema de Bézout, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = (a,b)$. Desta forma, temos:

$$c = (a,b) \cdot k = ax_0k + by_0k$$
$$= a(kx_0) + b(ky_0).$$

Por serem $kx_0, ky_0 \in \mathbb{Z}$ então a equação $ax + by = c$ admite uma solução. Portanto, a equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $(a,b)|c$.

b) Solução: Como $(7,19)=1$ e $1 \mid 781$ então a equação $7X+19Y=781$ possui solução. Uma solução para $7X+19Y=1$ é $x=-8$ e $y=3$. Assim, uma solução particular para $7X+19Y=781$ é $x_0=781\cdot(-8)=$ $=-6248$ e $y_0=781\cdot 3=2343$. Logo,

$$\begin{cases} x=-6248+19t \\ y=2343-7t, \ t\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como queremos todas as soluções em $\mathbb{N}\cup\{0\}$ então $-6248+19t\geq 0$ e $2343-7t\geq 0$. Ou seja, $329\leq t\leq 334$.

Portanto, as soluções pedidas são:

$(3,40),(22,33),(41,26),(60,19),(79,12)$ e $(98,5)$.

Questão 4. Ache o resto da divisão por 17 do número

$$S = 1^{16} + 2^{16} + \cdots + 85^{16}.$$

Solução. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que se $17 \nmid a$, então $a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Além disso, temos, obviamente, que:

$$17^{16} \equiv 0 \pmod{17}$$
$$34^{16} \equiv 0 \pmod{17}$$
$$51^{16} \equiv 0 \pmod{17}$$
$$68^{16} \equiv 0 \pmod{17}$$
$$85^{16} \equiv 0 \pmod{17}.$$ Logo,

$$S \equiv 80 \equiv 12 \pmod{17},$$ ou seja, o resto da divisão de S por 17 é 12.

Questão 5. Mostre que se p e q são primos tais que $q = p + 2$ e $p > 3$, então $p + q \equiv 0 (\text{mod } 12)$.

DEMONSTRAÇÃO. NOTE QUE $12 = 3 \times 4$ E $\text{MDC}(3,4) = 1$ E, PORTANTO, BASTA MOSTRAR QUE $p+q \equiv 0 (\text{mod } 3)$ E $p+q \equiv 0 (\text{mod } 4)$.

SE $p+q = 2p+2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, ENTÃO $2p \equiv -1 \equiv 2 (\text{mod } 3)$, OU SEJA, $p \equiv 1 (\text{mod } 3)$, logo $p+2 = q \equiv 3 \equiv 0 (\text{mod } 3)$, OU SEJA, $3 | q$, ABSURDO.

SE $p+q = 2(p+1) \equiv 2 (\text{mod } 3)$, ENTÃO $p+1 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, logo $p \equiv 0 (\text{mod } 3)$, OU SEJA, $3 | p$, ABSURDO.

PORTANTO, $p+q \equiv 0 (\text{mod } 3)$.

POR OUTRO LADO, COMO p É PRIMO ÍMPAR, ENTÃO $p+1 \equiv 0 (\text{mod } 2)$, logo $2(p+1) = p+q \equiv 0 (\text{mod } 4)$.

CONCLUSÃO: $p+q \equiv 0 (\text{mod } 12)$.

Questão 6. Dispomos de uma quantia x reais menor do que 3000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra $R\$1,00$, se a distribuirmos entre 12 pessoas sobram $R\$2,00$ e se a distribuirmos entre 13 pessoas sobram $R\$3,00$. De quantos reais dispomos?

Solução: Temos que $x < 3000$ e

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$
$$x \equiv 2 \pmod{12}$$
$$x \equiv 3 \pmod{13}.$$

Como $MDC(11,12) = MDC(11,13) = MDC(12,13) = 1$, pelo Teo. Chinês do Resto tal sistema possui única solução módulo $11 \times 12 \times 13 = 1716$.

Sejam $M_1 = 12 \times 13 = 156$, $M_2 = 11 \times 13 = 143$ e $M_3 = 11 \times 12 = 132$.

$$M_1 x_1 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 156 x_1 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$\Rightarrow 2x_1 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$\Rightarrow x_1 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$M_2 x_2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow 143 x_2 \equiv 1 \pmod{12}$$
$$\Rightarrow 11 x_2 \equiv 1 \pmod{12}$$
$$\Rightarrow x_2 \equiv 11 \pmod{12}$$

$$M_3 x_3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 132 x_3 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$\Rightarrow 2x_3 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$\Rightarrow x_3 \equiv 7 \pmod{13}.$$

Logo, $x = 1 \times 156 \times 6 + 2 \times 143 \times 11 + 3 \times 132 \times 7$

$= 936 + 3146 + 2772$

$= 6854 \equiv 1706 \pmod{1716}$ são as soluções do sistema. Como $x < 3000$, concluímos que a quantia é de R\$ 1706.