1ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **Grupos**

01. Defina Grupo e Grupo Abeliano.

02. Dê exemplos de Grupos.

03. Prove que o Elemento Identidade é único.

04. Prove que o Elemento Inverso é único.

05. Sejam $a,b \in (G,*)$. Mostre que:

a) $(a')' = a$

b) $(a*b)' = b'*a'$

06. Generalize a propriedade do item **b) da questão anterior** para n termos.

07. Sejam $a,x,y \in (G,*)$. Prove que:

$$a*x = a*y \qquad \Rightarrow \qquad x = y.$$

08. Verifique em cada item abaixo se o conjunto dado com a operação dada é um grupo. **Justifique.**

a) $(M,*)$, onde

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in R \quad e \quad a \neq 0 \right\}$$ e (*) é a operação usual de multiplicação.

b) $(M,*)$, onde

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a,b \in R \quad e \quad a,b \neq 0 \right\}$$ e (*) é a operação usual de multiplicação.

c) $(Z \times Z,*)$, onde

$Z : conjunto \;\; dos \;\; números \;\; \text{int}\,eiros$ e (*) é a operação:

$$(a,b)*(x,y) = (a+x, b+y), \; a,b,x,y \in Z$$

d) $(P(X),*)$, onde

1ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

$P(X): conjunto\ \ das\ \ partes\ \ de\ \ um\ \ conjunto\ \ X$ e (*) é a operação interseção entre conjuntos.

e) $(Z \times Z, *)$, onde

$Z: conjunto\ \ dos\ \ números\ \ \text{int}\,eiros$ e (*) é a operação:

$$(a,b)*(m,n) = (a+m, (-1)^m \cdot b + n),\ a,b,m,n \in Z$$

f) $(G,*)$, onde

$G = R \setminus \{1\}$ e (*) é a operação:

$$a * b = a + b - a \cdot b$$

09. Defina ordem de um grupo $(G,*)$. Dê exemplos.

10. Defina ordem de um elemento $a \in (G,*)$.

11. Defina Potência em um grupo $(G,*)$.

12. Mostre que para todo $a \in (G,*)$ é válido que:

a) $a^m * a^n = a^{m+n}$

b) $(a^m)^n = a^{m*n}$

13. Defina Grupo Cíclico.

14. Prove que todo Grupo Cíclico é Abeliano.

15. Defina Relação de Equivalência.

16. Defina Classe de Equivalência e Classe Residual.

17. Seja ~ uma relação de equivalência em um conjunto A e sejam $x, y \in A$. Prove que:

a) $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$

b) $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$

c) $\bigcup_{x \in A} \bar{x} = A$

18. Prove que $(Z_m, +)$ é grupo abeliano.

1ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

19. Mostre que $(Z_m, \cdot)$, com m par e maior que 2, não é um grupo.

20. Prove que um elemento $\bar{x} \in Z_m$ tem inverso multiplicativo, se e somente se, $(\bar{x}, m) = 1$.

21. Prove que a multiplicação é uma operação em $Z_m^{\ *}$, se e somente se, m é primo.

22. Conclua que $(Z_m^{\ *}, \cdot)$ com m primo é um Grupo Abeliano.

23. Seja $(G,*)$ um grupo abeliano. Prove que se $a, b \in (G,*)$ e $m \in Z$ então $(a*b)^m = a^m * b^m$.

24. Seja G um grupo tendo e como elemento identidade. Prove que se $x^2 = e$, $\forall \quad x \in G$, então G é um grupo abeliano.

25. Seja G um grupo contendo exatamente 2n elementos, $n \geq 1$ inteiro. Prove que existe $x \in G$, $x \neq e$, tal que $x^2 = e$, onde e representa a identidade de G.

26. Prove que todo grupo de ordem 3 é abeliano.

27. Sejam $a, b \in (G,*)$. Assuma que $|a| = 5$ e $a^3 * b = b * a^3$. Prove que $a * b = b * a$.

28. Construa as tábuas de operações dos grupos:

a) $(Z_7, +)$ **b)** $(Z_7^{\ *}, \cdot)$

29. Encontre a ordem de cada elemento de $(Z_7, +)$.

30. Encontre a ordem de todos os elementos de $(Z_7^{\ *}, \cdot)$.

31. Prove que o inverso de $\overline{m-1} \in (Z_m^{\ *}, \cdot)$ é $\overline{m-1}$.

32. Seja $(G,*)$ um grupo e $a \in G$. Prove que se $|a| = n$ então temos que para todo $m \in Z$:

$$a^m = e \Leftrightarrow n | m.$$

33. Seja $(G,*)$ um grupo e $a \in G$ com $|a| = n$ e $n = r \cdot s$. Seja $m \in Z$, arbitrário, prove que:

i) $|a^r| = s$;

ii) $\langle a^m \rangle = \langle a^{(m,n)} \rangle$

iii) $|a^m| = \dfrac{n}{(m.n)}$

1ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

34. Seja $(G,*)$ um grupo e $a \in G$ com $|a| = n$ e $n = r \cdot s$ tal que $(r,s) = 1$. Prove que existe um único par de elementos $b, c \in G$ tal que as condições abaixo são satisfeitas:

i) $|b| = r$ **e** $|c| = s$

ii) $b * c = c * b$

iii) $a = b * c$

35. Defina a Função Fi de Euler.

36. Calcule $\varphi(n)$ para $n = 1,2,\ldots,20$ e $\varphi(347)$, $\varphi(312)$.

37. Mostre que $\varphi(n) \le n - 1$.

38. Prove que:

a) $\varphi(p) = p - 1$, se p é primo

b) $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$, se p é primo e r é natural.

39. Demonstre que se p e q são primos então $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$.

40. Use que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ quando $(x,y) = 1$ para provar que:

$$m = \underbrace{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n}}_{\substack{decomposição\ em \\ fatores\ primos}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(m) = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i - 1}(P_i - 1).$$

41. Seja G um grupo cíclico de ordem n gerado por a. Prove que G tem $\varphi(n)$ geradores.

42. Quantos e quais os geradores do grupo cíclico $G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{11}\}$?

43. Quantos geradores tem um grupo cíclico de ordem 40, 300, 400 e 6^3?

44. Enuncie o Teorema de Euler e dê aplicações.

45. Seja x um elemento de um grupo. Se $x^2 \neq e$ e $x^6 = e$, prove que $x^4 \neq e$ e $x^5 \neq e$.

46. Prove que $(Z_6, +)$ é cíclico. Encontre todos os seus geradores.

47. Prove que se p é primo então o grupo $(Z_p, +)$ tem $p - 1$ geradores.

1ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

48. Determine os inversos de $\overline{25}$ e $\overline{39}$ em $(Z_{97},+)$.

49. Encontre todos os geradores do grupo $(Z_{48},+)$.

50. Quantos geradores tem um grupo cíclico de ordem 400?

51. Construa á tabua de operações do grupo $(S_2,\circ)$.

52. Construa á tabua de operações do grupo $(S_3,\circ)$.

53. Determine todos os elementos $f \in S_3$ tais que $f^2 = e$.

54. Determine todos os elementos $f \in S_3$ tais que $f^3 = e$.

55. Mostre que $\varphi(m)$ é par para todo $m \geq 3$.

56. Mostre que $\varphi(2n) = \begin{cases} \varphi(n), & se \quad n \quad é \quad ímpar \\ 2\varphi(n), & se \quad n \quad é \quad par \end{cases}$.

57. O grupo $\left(Z_5^{*}, \ \cdot \right)$ é cíclico?

58. Encontre todos os elementos invertíveis de Z_{12} em relação a multiplicação. Justifique.

59. Determine $x \in S_5$ que seja solução $a^2 \circ x \circ b^{-1} = c$, onde

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

60. Seja λ a seguinte permutação de S_{10}:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 9 & 4 & 10 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule a ordem de λ e a potência λ^{2017}.

Observação: Vale ressaltar que 80% ou mais desta lista já foi resolvida por mim durante as aulas!