2ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **Subgrupos**

01. Defina Subgrupo e dê exemplos.

02. Mostre que o elemento identidade de um subgrupo e do grupo são os mesmos.

03. Prove que o inverso de um elemento do subgrupo é o mesmo do grupo.

04. Prove que um subconjunto não vazio H de um grupo G é subgrupo de G se e somente se:

i) $a \in H \Rightarrow a' \in H$
ii) $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$
05. Se H é um subconjunto de G então H é um subgrupo de G se e somente se:
i) $H \neq \emptyset$

ii) $a, b \in H \Rightarrow a * b' \in H$

06. A estrutura $(H = \{2k; k \in Z\}, +)$ é um subgrupo de $(Z, +)$?

07. Mostre que $(H = \{z \in C; |z| = 1\}, \cdot) < (C^*, \cdot)$.

08. Defina centro de um grupo G. Mostre que $Z(G) < G$.

09. Defina centralizador de um elemento de um grupo G. Prove que $C_G x < G$.

10. Defina subgrupo de torção de G. Prove que $T(G) < G$.

11. Encontre todos os subgrupos do Grupo de Klein 4.

12. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. Prove que $H_1 \cap H_2 < G$.

13. Verifique a validade das justificativas abaixo:

i) $(H = \{x \in Q; x < 0\}, \cdot) < G = (R^*, \cdot)$

ii) $(H = \{a + b\sqrt[3]{2} \in R^*; a, b \in Q\}, \cdot) < G = (R^*, \cdot)$

iii) $\left(H = \left\{x \in R^*; x = 1 \quad ou \quad x \quad é \quad irracional\right\}, \cdot\right) < G = (R^*, \cdot)$

14. Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G com $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$. Prove que $H_1 \cup H_2 < G$.

15. Dê exemplo de dois subgrupos de um grupo G cuja união não seja subgrupo de G.

16. Demonstre que todo subgrupo de um grupo cíclico é também cíclico.

2ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

17. Seja G um grupo e X um conjunto. Dizemos que G age sobre X se existe uma função

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g * x \end{aligned}$$

satisfazendo os axiomas:

i) $e_G * x = x \quad \forall \quad x \in X$;

ii) $(g * h) * x = g * (h * x) \quad \forall \quad x \in X \quad e \quad g, h \in G$

Seja $G \times X \to X$ uma ação de G sobre X e seja $x \in X$, o **estabilizador** de x, que denotamos por G_x é definido por $G_x = \{g \in G; g * x = x\}$. Mostre que $G_x < G$.

18. Defina Classe Lateral à Direita. Dê exemplos.

19. Seja G um grupo e $H < G$. Defina G / H e $[G : H]$.

20. Prove que um subgrupo H de um grupo G e qualquer classe lateral à direita Hx, $x \in G$, tem a mesma cardinalidade.

21. Enuncie e demonstre o Teorema de Lagrange.

22. Mostre que todo grupo de ordem prima é cíclico.

23. Prove que todo grupo de ordem menor ou igual a 5 é abeliano.

24. Seja G um grupo. Prove que $a^{|G|} = e \quad \forall \quad a \in G$.

25. Demonstre que se G é um grupo finito e $K < H < G$ então $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

26. Sejam $a, b \in G$. Prove que $\# Ha = \# Hb$.

27. Defina Subgrupo Normal.

28. Seja G um grupo. Mostre que $N_1 \lhd G$ e $N_2 \lhd G$ então $N_1 \cap N_2 \lhd G$.

29. Seja $(G, *)$ um grupo e $N \lhd G$. Mostre que o conjunto quociente $G / N = \{aN; a \in G\}$ é também um grupo com a operação $aN * bN = abN$ chamado de Grupo Quociente.

30. Seja $(G, *)$ um grupo. Prove que $Z(G) \lhd G$.

UMA VALIOSA OBSERVAÇÃO:

SOMENTE 4 QUESTÕES DESTA LISTA NÃO FORAM RESOLVIDAS POR MIM DURANTE AS AULAS.