2ª Lista de Introdução à Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **Conjuntos e Aplicações**

01. Sejam A e B conjuntos. Mostre que:

a) $A\cup\varnothing = A$
b) $A\cup A = A$
c) $A\subset A\cup B$ e $B\subset A\cup B$
d) $A\cup B = B\cup A$
e) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$
f) $\varnothing\subset\varnothing$
g) $\varnothing\subset A,\ \forall\ A$

02. Prove que: Dados os conjuntos X, X', Y e Y', com $X\subset Y$ e $X'\subset Y'$, então $X\cup X'\subset Y\cup Y'$.

03. Mostre que $A\cup B = A$ se, e somente se, $B\subset A$.

04. Para todos os conjuntos A, B e C, mostre que:

a) $A\cap\varnothing = A$
b) $A\cap B\subset A$ e $A\cap B\subset B$
c) $A\cap B = B\cap A$
d) $A\cup B = B\cup A$
e) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

05. Demonstre que se A e B são conjuntos, então:

a) $A-\varnothing = A$
b) $A-A=\varnothing$
c) Se $A\cap B=\varnothing$, então $A\setminus B = A$ e $B\setminus A = B$

06. Prove que se B e B' são subconjuntos de A, então tem-se que

$C_A(B\cup B') = C_A B\cap C_A B'$
07. Suponha que $A\cap B=\varnothing$. Mostre que:

a) $A\cap(B\cup C) = A\cap C$
b) $A = (A\cup B)\setminus B$

08. Prove que:

a) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$;
b) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

2ª Lista de Introdução à Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

09. Sejam A e B conjuntos tais que $A \cup B = A \cap B$. Prove que $A = B$.

10. Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A e indica-se por $P(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A.

a) Determine $P(A)$ quando $A = \{1,2,3,4\}$.

b) Prove que, se um conjunto A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.

c) Se o número de subconjuntos binários (formados de dois elementos) de um conjunto dado é 15, quantos subconjuntos tem esse conjunto?

11. Mostre que, se A e B são conjuntos finitos, então:

a) $Se \;\; B \subset A \;\; então \;\; n(A - B) = n(A) - n(B)$

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

12. Encontre $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$ onde $A = \{x \in R; x^2 - 4 > 0\}$ e $B = \{x \in R; x < 2\}$.

13. Encontre o MMC e o MDC de 12 e 72.

14. Julgue as seguintes afirmações sobre o conjunto $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

i) $\varnothing \in X \;\; e \;\; n(X) = 10$;

ii) $\varnothing \subset X \;\; e \;\; n(X) = 10$;

iii) $5 \in X \;\; e \;\; ; \{5\} \subset X$;

iv) $\{0,1,2,5\} \cap \{5\} = 5$.

15. Sejam X um conjunto não-vazio e $A \subset X$, $B \subset X$. Prove que:

a) Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset C(A)$;

b) $B \setminus C(A) = B \cap A$.

16. Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B \setminus A)$, $n(A \setminus B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r > 0. Encontre $n(A \setminus B)$ sabendo que $n(B \setminus A) = 4$ **e** $n(A \cup B) + r = 64$.

2ª Lista de Introdução à Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

17. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjuntos universo U. Prove ou dê contra-exemplo que:

i) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$;
ii) $(A\cap C)-B=A\cap C(B)\cap C$;
iii) $(A-B)\cap(B-C)=(A-B)-C$.

18. Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A\cup B$ contenha 12 elementos. Encontre o número de elementos de $P(B-A)\cup P(\varnothing)$.

19. Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A\subset B$ e $n(\{C : C\subset B\setminus A\})=128$. Mostre que:

a) $n(B)-n(A)=7$
b) $n(B)+n(A)\geq 9$

20. Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de R, não vazios. Mostre ou dê contra-exemplo que:

a) $X\cap\{[Y\cap(C_R(X\cup Y))]\cup[X\cup(R-(C_R X\cap C_R Y))]\}=X$;
b) Se $Z\subset X$ então $(Z\cup Y)\cup[X\cup(C_R Z\cap Y)]=X\cup Y$;
c) Se $R-(X\cup Y)\subset Z$ então $R-Z\subset X$.

21. Sejam a, b e c números reais tais que $a-b$ e $a+b+c$ são racionais. Prove ou dê contra-exemplo que:

i) Se a é racional ou b é racional, então c é racional;
ii) Se c é racional, então $a+b$ é racional;
iii) Se c é racional, então a e b são racionais.

22. Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. Mostre que o número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é igual a 247.

23. Sejam A, B e C forem conjuntos tais que $n(A\cup B)=23$, $n(B-A)=12$, $n(C-A)=10$, $n(B\cap C)=6$ e $n(A\cap B\cap C)=4$. Encontre o valor de $n(A\cup B\cup C)$.

24. Seria matemática possível em uma turma de 44 alunos que creem somente em Deus ou Jesus Cristo acontecer que:

20 creem em Deus e 17 creem em Jesus Cristo?

25. Em uma certa comunidade existem 200 000 professores de 1º e 2º graus que trabalham na rede oficial do estado, 25 000 professores de 1º e 2º graus que trabalham na rede particular de ensino e 12 000 professores de 3º grau. Se 2,5% dos professores da rede oficial trabalham na rede particular, se 0,25% dos professores da rede oficial trabalham no 3° grau, e se 2% dos professores da rede particular trabalham no 3° grau, quantos professores possui essa comunidade se apenas 200 professores trabalham, simultaneamente, na rede pública, particular e no 3° grau?