

3ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **Homomorfismo**

01. Defina Homomorfismo de Grupos. O que é um *homomorfismo trivial*?

02. Verifique se as aplicações abaixo são homomorfismos:

i) $f : (R, +) \rightarrow (R_+^*, \cdot)$ com $f(x) = 2^x$.

ii) $g : (R_+^*, \cdot) \rightarrow (R, +)$ com $g(x) = \log x$

iii) $h : (C^*, \cdot) \rightarrow (R_+^*, \cdot)$ com $h(x) = |x|$

03. Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos, e_G e e_J as identidades de G e J , respectivamente. Prove que $f(e_G) = e_J$.

04. Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Prove que $f(a') = [f(a)]'$ $\forall a \in G$.

05. Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Mostre que se $H < G$ então $f(H) < J$.

06. Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ e $g : (J, \otimes) \rightarrow (L, @)$ homomorfismos de grupos. Prove que $g \circ f : (G, *) \rightarrow (L, @)$ também é um homomorfismo.

07. Defina Núcleo de um homomorfismo. Dê Exemplos.

08. Encontre $\ker(f)$, $\ker(g)$ e $\ker(h)$:

i) $f : (R, +) \rightarrow (R_+^*, \cdot)$ com $f(x) = 2^x$

ii) $g : (R_+^*, \cdot) \rightarrow (R, +)$ com $g(x) = \log x$

iii) $h : (C^*, \cdot) \rightarrow (R_+^*, \cdot)$ com $h(x) = |x|$

09. Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Mostre que se $\ker(f) < G$.

10. Defina e dê exemplos de:

i) Monomorfismo

ii) Epimorfismo

iii) Isomorfismo

3ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

iv) Endomorfismo

v) Automorfismo

11. Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Prove que f é um monomorfismo se, e somente se, $\ker(f) = \{e\}$.

12. Mostre que o conjunto de todos os automorfismos de um grupo $Aut(G)$ é um grupo sob a operação de composição de funções.

13. O conjunto de todos os endomorfismo de um grupo $End(G)$ poderia ser um grupo?

14. (Primeiro Teorema do Isomorfismo) Seja $f : (G, *) \rightarrow (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Prove que $G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.

UMA VALIOSA OBSERVAÇÃO:

SOMENTE 3 QUESTÕES DESTA LISTA NÃO FORAM RESOLVIDAS POR MIM DURANTE AS AULAS.