3ª Lista de Introdução à Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **Funções e Aplicações**

01. Defina função, função injetora, sobrejetora, bijetora e função inversa.

02. Defina Imagem de uma função.

03. Seja $f : X \to Y$ uma função. Se $A, B \subset X$, mostre que:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
c) Um contra exemplo para $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

04. Seja $f : X \to Y$ uma função. Se $A, B \subset X$, mostre que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ se e somente se f é injetiva.

05. Mostre que:

a) A função $f : N^* \to P$ definida por $f(n) = 2n$ onde N é o conjuntos dos números naturais e $P = \{2,4,6,8,...\}$ é bijetiva.
b) $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva.
c) $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x + 1$ é sobrejetiva.

06. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções. Demonstre que:

a) Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.
b) Se $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.
c) Se $g \circ f$ é injetora e f é sobrejetora, então g é injetora.

07. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções. Demonstre que:

a) Se f e g são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.
b) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.
c) Se $g \circ f$ é sobrejetora e g é injetora, então f é sobrejetora.

08. Prove que existe uma bijeção $f : N \to Z$ onde N é o conjunto dos números naturais e Z o conjunto dos números inteiros.

09. Defina função inversa à esquerda e à direita.

10. Prove que: Uma função é sobrejetora se, e somente se, ela admite inversa à direita.

3ª Lista de Introdução à Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

11. Demonstre que uma função é injetora se, e somente se, ela admite uma inversa à esquerda.

12. Prove que se uma função admite uma inversa à esquerda e uma inversa à direita, estas são iguais.

13. Seja $f : N \times N \to N$ dada pela lei $f(x, y) = mdc(x, y)$.
a) f é injetora?
b) f é sobrejetora?

14. Mostre que a aplicação $f : Z \to Z$ dada pela lei $f(n) = 2n$, $n \in Z$, é injetora mas não é sobrejetora.

15. Considere a aplicação $f : Z^2 \to Z^2$ tal que $f(x, y) = (2x + 3, 4y + 5)$. Prove que f é injetora. Verifique se f é bijetora.

16. Seja $f : N \to N$ definida por $f(mn) = nf(m) + mf(n)$ para todos os naturais m e n. Se $f(10) = 19$, $f(12) = 52$ e $f(15) = 26$, encontre o valor de $f(8)$.

17. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a>0. Mostre que $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

18. Prove que se a, b e c são naturais ímpares, as raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

19. Use a caracterização da função quadrática para encontrar o n-ésimo termo da sequência

3, 7, 13, 21, 31, 43, ...

20. (MACKENZIE) Observe a disposição, abaixo, da sequencia dos números naturais ímpares.

1ª linha → 1

2ª linha → 3, 5

3ª linha → 7, 9, 11

4ª linha → 13, 15, 17, 19

5ª linha → 21, 23, 25, 27, 29

....

O quarto termo da vigésima linha é:

a) 395 b) 371 c) 387 d) 401 e) 399