4ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **<u>Anéis, Corpos e Homomorfismo de Anéis</u>**

01. Defina Anel. Dê exemplos.

02. Mostre que a terna $(R^R,+,\cdot)$ é um anel, onde $R^R = \{f;\, f: R \to R\}$ com $f+g: R \to R$, $x \mapsto f(x)+g(x)$, e $f \cdot g: R \to R$, $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$.

03. Defina Anel Comutativo. Dê exemplos.

04. Defina Anel com unidade. Dê exemplos.

05. Defina Anel de Integridade. Dê exemplos.

06. Seja $(A,\oplus,\otimes)$ um anel e $a,b,c \in A$. Mostre que:

i) $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$

ii) $a \otimes (-b) = -a \otimes b = -(a \otimes b)$

iii) $a \otimes (b-c) = a \otimes b - a \otimes c$

iv) $(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$

07. Defina Subanel. Dê exemplos.

08. Defina Centro de um Anel. Mostre que o centro de um anel $(A,\oplus,\otimes)$ é um subanel de A.

09. Defina Corpo. Dê exemplos.

10. Prove que todo corpo é um anel de integridade.

11. Mostre que se $p > 0$ é um número primo, então $(Z_p,+,\cdot)$ é um corpo.

12. Mostre que $Z\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2};\, a,b \in Z\right\}$ com as operações usuais de adição e multiplicação é um subanel de $(R,+,\cdot)$.

13. Defina Subcorpo. Dê exemplos.

14. Mostre que $L = \left\{a + b\sqrt{2};\, a,b \in Q\right\}$ é um subcorpo de R com as operações usuais de soma e multiplicação.

15. Defina Homomorfismo de Anéis. Dê exemplos.

4ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

16. Mostre que a aplicação $f:(Z,+,\cdot)\to(Z_m,+,\cdot)$ com $f(r)=\bar{r}$ é um homomorfismo de anéis. Faço o mesmo para $g:(R,+,\cdot)\to(R,+,\cdot)$ com $g(s)=s$.

17. Seja $f:A\to B$ é um homomorfismo de anéis. Prove que:

i) $f(0_A)=0_B$

ii) $f(-a)=-f(a)$

iii) $f(a-b)=f(a)-f(b)$

18. Defina Núcleo de Um Homomorfismo de Anéis.

19. Mostre que se $f:A\to B$ é um homomorfismo de anéis então $\ker(f)$ é um subanel de A.

20. Se $f:A\to B$ é um homomorfismo de anéis então f é injetiva se, e somente se, $\ker(f)=\{0_A\}$. Prove.

21. Defina Isomorfismo de Anéis.

22. Verifique se a terna ordenada $(Z,\oplus,\otimes)$ com as operações abaixo definidas é um anel comutativo com unidade:

$$a\oplus b=a+b-1 \text{ e } a\otimes b=a+b-a\cdot b$$

23. Verifique se a terna ordenada $(R,\oplus,\otimes)$ com as operações abaixo definidas é um corpo:

$$a\oplus b=a+b-1 \text{ e } a\otimes b=a+b-a$$

24. Mostre que $(Q,\oplus,\otimes)$ com as operações abaixo definidas é um anel comutativo com unidade:

$$x\oplus y=x+y-3 \text{ e } x\otimes y=x+y-\frac{x\cdot y}{3}$$

25. Seja E um conjunto não vazio. Mostre que $(\wp(E),\oplus,\otimes)$ com as operações abaixo definidas é um anel comutativo com unidade:

$$X\oplus Y=(X\cup Y)-(X\cap Y) \text{ e } x\otimes y=X\cap Y$$

26. Se B e C são subanéis de A então $B\cap C$ é subanel de A. Prove.

27. Se B e C são subcorpos de A então $B\cap C$ é subcorpo de A. Prove.

4ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

28. A função $f : Z \to Z$, $f(x) = kx$**,** é um homomorfismo de anéis. Nessas condições, quais os possíveis valores para k?

a) 0 ou 1
b) 2
c) 1ou 2 ou3
d) -1 ou 1
e) -1

29. Sendo $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis, que nome é dado a $f^{-1}(\{0\})$?

a) Domínio de f
b) Imagem de f
c) Valor mínimo de f
d) Núcleo de f
e) Função composta de f coma função constante nula

30. A função $f : Z \to Z \times Z$ é um homomorfismo do anel $(Z,+,\cdot)$ no anel $(Z \times Z,+,\cdot)$. Nessas condições, quanto é $f(0)$?

a) $(0,0)$
b) $(1,0)$
c) $(0,1)$
d) $(1,1)$
e) $(-1,-1)$