5ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

- **<u>Ideais</u>**

01. Defina Ideal em um anel A.

02. Verifique se $(I,+,\cdot)$ é um ideal do anel $(A,+,\cdot)$ em cada caso:

a) $I=\{f:R\to R; f(-1)=f(1)=0\}$, $A=R^R$.

b) $I=\{f:R\to R; f(-1)=f(1)=2\}$, $A=R^R$.

03. Seja I um ideal em um anel comutativo A. Prove que:

i) $0_A\in I$

ii) $a\in I\Rightarrow -a\in I$

iii) $a,b\in I\Rightarrow a\oplus b\in I$

iv) Se A possui unidade e se algum elemento inversível do anel pertence a I, então $I=A$.

04. Se $f:R\to S$ é um homomorfismo de anéis então $\ker(f)$ é um ideal em R.

05. Se B e C são ideais em A então $B\cap C$ é ideal em A. Prove.

06. Se B e C são ideais em A então $B+C=\{b+c; b\in B \ e \ c\in C\}$ é ideal em A. Prove.

07. Qual dos conjuntos I a seguir é um ideal de R?

a) $I=\{0\}$
b) $I=Z$
c) $I=Q$
d) $I=R-Q$
e) $I=Q[\sqrt{2}]$

08. Qual dos conjuntos I a seguir é um ideal de Z?
a) $I=\{-4m+1; m\in Z\}$
b) $I=\{4m+1; m\in Z\}$
c) $I=\{4m+3; m\in Z\}$
d) $I=\{-4m; m\in Z\}$
e) $I=\{4m; m\in Q\}$

5ª Lista de Álgebra

Professor: Alessandro Monteiro

09. Sejam I e J ideais de um anel R. Prove que o produto de I com J definido por

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,;\, x_i \in I, y_i \in J, 1 \le i \le n, n \ge 1 \right\}$$

é um ideal de R.

10. Prove que se F é um corpo, então seus únicos ideais são $\{0\}$ e F.