Soluções da 1ª Prova Parcial de Álgebra – Vespertino – 2016/2

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. Defina:
i) (vale 0,5 ponto) Semigrupo.

Uma solução: Seja G um conjunto não vazio e $*$ uma operação fechada em G. A estrutura $(G,*)$ é chamada de Semigrupo quando $*$ é associativa.

ii) (vale 0,5 ponto) Grupo.

Uma solução: É um semigrupo munido de duas propriedades: Existência da Identidade $(\exists\ e \in G;\ a*e = e*a = a\ \forall a \in G)$ e Existência do Inverso $(\exists\ a' \in G;\ a*a' = a'*a = e\ \forall a \in G)$.

iii) (vale 1,0 ponto) Verifique se o grupóide $(P(X),*)$, onde $P(X)$: conjunto das partes de um conjunto X e (*) é a operação de interseção entre conjuntos é um grupo. **JUSTIFIQUE.**

Uma solução: Não é um grupo, pois se $X \neq \varnothing$ então $e = X$, uma vez que $A \cap X = X \cap A = A\ \forall\ A \in P(X)$. E com isso temos um furo na propriedade da existência do inverso. Por exemplo, não existe $\varnothing' \in P(X)$ tal que $\varnothing \cap \varnothing' = X$ pois $\varnothing \cap A = \varnothing\ \forall\ A$.

02. (vale 2,0 pontos) Enuncie o Teorema de Lagrange e **prove** que se G é um grupo finito e $a \in G$, então $a^{|G|} = e$.

Uma solução: Teorema de Lagrange: Se $(G,*)$ é um grupo finito e $H < G$ então $|H|$ divide $|G|$.

Prova ($a^{|G|} = e$): Seja $a \in G$ e considere o subgrupo $H = \langle a \rangle$. Como $|H| = |a|$ então pelo Teorema de Lagrange, existe k inteiro, tal que $a^{|G|} = a^{k\cdot|H|} = a^{k\cdot|a|} = \left(a^{|a|}\right)^k = e^k = e.$

03. Seja o grupo $(Z_{2016},+)$.

a) (vale 1,0 ponto) Ele é cíclico? Quantos geradores tem esse grupo? **JUSTIFIQUE.**

Uma solução: Sim, pois, por exemplo, $(Z_{2016},+) = \langle \bar{1} \rangle$. E tem $\varphi(2016) = \varphi(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = 16 \cdot 6 \cdot 6 = 576$ geradores.

b) (vale 1,0 ponto) Encontre $\left|\overline{16}\right|$. **JUSTIFIQUE.**

Uma solução: $\left|\overline{16}\right| = \dfrac{2016}{(2016,16)} = \dfrac{2016}{16} = 126$.

04. (vale 2,0 pontos) Defina Subgrupo. **Prove** que: Se H_1 e H_2 são subgrupos de um grupo G então $H_1 \cap H_2 < G$.

Uma solução: Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um subgrupo de G se for ele próprio um grupo com a mesma operação de G.

Prova ($H_1 \cap H_2 < G$): Como $H_1 < G$ e $H_2 < G$ então $H_1, H_2 \subset G$. Logo $H_1 \cap H_2 \subset G$. Por $e_G \in H_1, H_2$ temos que $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$. E, se $a, b \in H_1 \cap H_2$ então $a, b \in H_1$ e $a, b \in H_2$, e pela hipótese dada $a * b' \in H_1 \cap H_2$. Portanto, $H_1 \cap H_2 < G$.

05. (vale 2,0 pontos) Prove que um grupo G é abeliano **se e somente se** a aplicação $f : G \to G$, definida por $f(x) = x^{-1}$ é um homomorfismo.

Uma solução:

($\Rightarrow$): $a, b \in G$, G abeliano $\Rightarrow f(a*b) = (a*b)^{-1} \overset{hip.}{=} a^{-1} * b^{-1} = f(a) * f(b) \Rightarrow$ f é um homomorfismo.

($\Leftarrow$): f é um homomorfismo $\Rightarrow f(a*b) = f(a) * f(b) \Rightarrow (a*b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1} \Rightarrow (a*b)^{-1} = (b*a)^{-1} \Rightarrow a*b = b*a \Rightarrow$ G é abeliano.

06. (Extra – vale 1,0 ponto) Encontre o MDC de 454545454545 e 545454545454. **JUSTIFIQUE.**

Uma solução:

$$\begin{cases} x = 454545454545 = 45 \cdot 10101010101 = 5 \cdot 9 \cdot 10101010101 \\ y = 545454545454 = 54 \cdot 10101010101 = 6 \cdot 9 \cdot 10101010101 \end{cases} \overset{(5,6)=1}{\Rightarrow} (x, y) = 90909090909.$$