GABARITO – TURMA DA TARDE

01.
i) (vale 0,5 ponto) Defina Anel de Integridade.

Uma solução: É um anel comutativo com unidade sem divisores de zero.

ii) (vale 0,5 ponto) Defina Subcorpo.

Uma solução: É um subconjunto não vazio de um corpo que munido das mesmas operações deste é também um corpo.

iii) (vale 1,5 pontos) Se B e C são subcorpos de um corpo A, então $B \cap C$ é um subcorpo de A. **Prove.**

Uma solução: Prova: Temos que

i) $B \cap C \subset A$, pois $B, C \subset A$
ii) $0_A, 1_A \in B \cap C$, pois $0_A, 1_A \in B, C$
iii)

$$x, y \in B \cap C \Rightarrow x, y \in B \;\; e \;\; x, y \in C \overset{hip.}{\Rightarrow} \begin{cases} x - y \in B, C \\ x \otimes y^{-1} \in B, C, y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x - y, x \otimes y^{-1} \in B \cap C$$

Logo $B \cap C$ é um subcorpo de A.

02. (vale 1,0 ponto) Prove ou dê contraexemplo: Todo Anel de Integridade é um Corpo.

Uma solução: Contraexemplo: O anel dos inteiros $(Z, +, \cdot)$ é de integridade, mas não é um corpo.

03. (vale 1,5 pontos) Prove que se A e B são ideais em um anel R tal que $A \cap B = \{0\}$ então $a \otimes b = 0$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

Uma solução: Prova:

$$a \in A \;\; e \;\; b \in B \overset{hip.}{\Rightarrow} a \otimes b \in A \;\; e \;\; a \otimes b \in B \overset{hip}{\Rightarrow} a \otimes b = 0.$$

04. (vale 1,5 pontos) Prove que se U é um ideal em R contendo a unidade de R, então $U = R$.

Uma solução: Prova: $x \in R \;\; e \;\; 1_R \in U \overset{hip.}{\Rightarrow} x = x \otimes 1_R \in U \Rightarrow R \subset U \overset{hip.: U \subset R}{\Rightarrow} U = R$.

05. (vale 2,0 pontos) Considere os anéis $X=(R,+,\cdot)$ com operações usuais e $Y=(R,\oplus,\otimes)$ onde $x\oplus y=x+y+1$ e $x\otimes y=x+y+xy$. Mostre que $f:X\to Y$ definida por $f(x)=x-1$ é um isomorfismo de anéis.

Uma solução: Prova: Temos:

i) $f(x+y)=x+y-1=(x-1)+(y-1)+1=f(x)\oplus f(y)$

ii) $f(x\cdot y)=xy-1=(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)=f(x)\otimes f(y)$

iii) $x,y\in X,\ f(x)=f(y)\Rightarrow x-1=y-1\Rightarrow x=y\Rightarrow f\ \ \text{é}\ \ \textit{injetiva}$

iii) $y\in Y\Rightarrow\exists\ \ x=y+1\in X;\ f(x)=y+1-1=y\Rightarrow f\ \ \text{é}\ \ \textit{sobrejetiva}$

Logo, f é um homomorfismo bijetor. Ou seja, f é um isomorfismo.

06. (vale 1,5 ponto) No corpo Z_{2017}, **determine** o inverso multiplicativo do elemento $\overline{2015}$.

Uma solução:

$$1=2015-2\cdot 1007=2015-(2017-2015)1007=1008\cdot 2015-1007\cdot 2017\Rightarrow \bar{1}=\overline{1008}\cdot\overline{2015}$$

$$\Rightarrow\left(\overline{2015}\right)^{-1}=\overline{1008}$$

07. (Extra: vale 1,0 ponto) Seja o polinômio

$$P(x)=(2x^2+x+1)(-3+7x-x^2)+(x^3-2)(-13+2x)\in Z[x].$$

Mostre que $P(x)$ é um polinômio constante. **Racionalize** o denominador de $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$. (**Sugestão:** calcule $P(\sqrt[3]{2})$.)

Uma solução: Prova:

i)

$$P(x)=(2x^2+x+1)(-3+7x-x^2)+(x^3-2)(-13+2x)$$

$$=-6x^2+14x^3-2x^4-3x+7x^2-x^3-3+7x-x^2-13x^3+2x^4+26-4x$$

$$=23$$

ii) $P(\sqrt[3]{2})=\left(2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)=23\Rightarrow\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\dfrac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$.