GABARITO – TURMA DA NOITE

01.
i) (vale 0,5 ponto) Defina Corpo.

Uma solução: É um anel comutativo com unidade tal que todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo.

ii) (vale 0,5 ponto) Defina Subanel.

Uma solução: É um subconjunto não vazio de um anel que munido das mesmas operações deste é também um anel.

iii) (vale 1,5 pontos) Se B e C são **subanéis** de um anel A, então $B \cap C$ é **subanel** de A. **Prove.**

Uma solução: Prova: Temos que

i) $B \cap C \subset A$, pois $B, C \subset A$
ii) $B \cap C \neq \varnothing$, pois $0_A \in B, C$
iii) $x, y \in B \cap C \Rightarrow x, y \in B \;\; e \;\; x, y \in C \overset{hip.}{\Rightarrow} \begin{cases} x - y \in B, C \\ x \otimes y \in B, C \end{cases} \Rightarrow x - y, x \otimes y \in B \cap C$

Logo $B \cap C$ é um subanel de A.

02. (vale 1,0 ponto) Prove ou dê contraexemplo: Todo subanel é um Ideal.

Uma solução: Contraexemplo: O anel dos inteiros $(Z, +, \cdot)$ é um subanel dos racionais $(Q, +, \cdot)$, mas não é um ideal em $(Q, +, \cdot)$.

03. (vale 1,5 pontos) Prove que se A e B são ideais em um anel R tal que $A \cap B = \{0\}$ então $a \otimes b = 0$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

Uma solução: Prova:

$$a \in A \;\; e \;\; b \in B \overset{hip.}{\Rightarrow} a \otimes b \in A \;\; e \;\; a \otimes b \in B \overset{hip}{\Rightarrow} a \otimes b = 0.$$

04. (vale 1,5 pontos) Prove que se F é um corpo, então seus únicos ideais são $\{0\}$ e F.

Uma solução: Prova:

$$I \neq \{0\} \;\; é \;\; um \;\; ideal \;\; em \;\; F \Rightarrow 1_F \in I, pois \;\; 1_F = x \otimes x^{-1}, x \neq 0 \in I, x^{-1} \in F$$
$$\Rightarrow F \subset I, pois \;\; x = x \otimes 1_F \in I \;\; \forall \;\; x \in F$$
$$\Rightarrow I = F, uma \;\; vez \;\; que \;\; I \subset F$$

05. (vale 2,0 pontos) Considere os anéis $X=(R,+,\cdot)$ com operações usuais e $Y=(R,\oplus,\otimes)$ onde $x\oplus y=x+y+1$ e $x\otimes y=x+y+xy$. Mostre que $f:X\to Y$ definida por $f(x)=x-1$ é um isomorfismo de anéis.

Uma solução: Prova: Temos:

i) $f(x+y)=x+y-1=(x-1)+(y-1)+1=f(x)\oplus f(y)$

ii) $f(x\cdot y)=xy-1=(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)=f(x)\otimes f(y)$

iii) $x,y\in X,\ f(x)=f(y)\Rightarrow x-1=y-1\Rightarrow x=y\Rightarrow f\ \ \textit{é}\ \ \textit{injetiva}$

iii) $y\in Y\Rightarrow\exists\ \ x=y+1\in X;\ f(x)=y+1-1=y\Rightarrow f\ \ \textit{é}\ \ \textit{sobrejetiva}$

Logo, f é um homomorfismo bijetor. Ou seja, f é um isomorfismo

06. (vale 1,5 pontos) No corpo Z_{2017}, **determine** o inverso multiplicativo do elemento $\overline{2013}$.

Uma solução:

$$1=2013-2012=2013-4\cdot 503=2013-(2017-2013)503=504\cdot 2013-503\cdot 2017\Rightarrow \overline{1}=\overline{504}\cdot\overline{2013}$$

$$\Rightarrow\left(\overline{2013}\right)^{-1}=\overline{504}$$

07. (Extra: vale 1,0 ponto) Seja o polinômio

$$P(x)=(2x^2+x+1)(-3+7x-x^2)+(x^3-2)(-13+2x)\in Z[x].$$

Mostre que $P(x)$ é um polinômio constante. **Racionalize** o denominador de $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$. (**Sugestão:** calcule $P(\sqrt[3]{2})$.)

Uma solução: Prova:

i)

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x^2+x+1)(-3+7x-x^2)+(x^3-2)(-13+2x)\\&=-6x^2+14x^3-2x^4-3x+7x^2-x^3-3+7x-x^2-13x^3+2x^4+26-4x\\&=23\end{aligned}$$

ii) $P(\sqrt[3]{2})=\left(2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)=23\Rightarrow\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\dfrac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$.