UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA
ESCOLA NORMAL SUPERIOR - ENS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Soluções da 1ª Prova Parcial de Álgebra Linear – PROVA B - 2017/1

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. Seja a matriz definida por $A = (a_{ij})_{n \times n} = x_j^{\,i-1}$.

a) (vale 1,0 ponto) Escreva A.

b) (vale 1,0 ponto) Sob quais condições temos que $\det A = 0$? **Justifique.**

Uma solução:

a) $A = (a_{ij})_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & a_{3(n-1)} & a_{3(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^{\,2} & x_2^{\,2} & \ddots & x_{n-1}^{\,2} & x_n^{\,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{\,n-1} & x_2^{\,n-1} & \cdots & x_{n-1}^{\,n-1} & x_n^{\,n-1} \end{pmatrix}$.

b) Como $\det A = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$ então $\det A = 0$ se, e somente se, $x_j = x_i$ para algum $1 \le i < j \le n$.

02. (vale 1,0 + 1,5 = 2,5 pontos) Defina Subespaço Vetorial. **Mostre que** o conjunto $S = \{A \in M_{nxn}; A^t = A\}$ das matrizes simétricas $n \times n$ é um subespaço do espaço vetorial M_{nxn} das matrizes $n \times n$.

Uma solução:

Definição de Subespaço: Seja V um espaço vetorial e S um subconjunto de V. Dizemos que S é um subespaço de V quando $0_v \in S$ e $u + \lambda v \in S$ para todo $u, v \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mostrando que $S = \{A \in M_{nxn}; A^t = A\}$ **é um subespaço de** M_{nxn}**:**

Temos:

$i)$ $\bar{0} \in S$, uma vez que $(\bar{0})^T = \bar{0}$.

$ii)\ \ \lambda \in \mathbb{R}\ \ e\ \ A,B \in S \Rightarrow (A+\lambda B)^T = A^T + (\lambda B)^T = A + \lambda B$

$$\Rightarrow A + \lambda B \in S$$

Logo, S é um subespaço.

03. (vale 1,5 pontos) Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Mostre que eles são suficientes para encontrarmos uma base para V.

Uma solução:

Prova: Considere $B_0 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se B_0 for linearmente independente então não temos nada a fazer, pois a demonstração termina aqui. Caso contrário, existe um vetor em B_0 que pode ser escrito como combinação linear dos outros. Assim, por simplicidade, suponhamos que este vetor seja v_n. Se o conjunto $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$, que também gera V, for linearmente independente então o mesmo será uma base para V. Se não for, prosseguimos de forma análoga a anterior. Após finitos passos encontraremos um conjunto B_t com $n-t$ vetores que geram V e são linearmente independentes. Logo, eles são suficientes para encontramos uma base para V.

04. Dados $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,2,3)$:

a) (vale 0,5 ponto) Os vetores v_1 e v_2 geram o R^3? **Justifique.**

b) (vale 1,0 ponto) Seja v_3 um terceiro vetor do R^3. Quais as condições sobre v_3, para que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de R^3?

c) (vale 1,0 ponto) Encontre um vetor v_3 que complete junto com v_1 e v_2 uma base do R^3. **Justifique.**

Uma solução:

a) Não, uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

b) O vetor v_3 não pode ser combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

c) Se $v_3 = (a,b,c)$ então deve ocorrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$. Com isso, devemos ter $a - 2b + c \neq 0$. Logo, entre infinitos exemplos, podemos escolher $v_3 = (0,0,1)$.

05. (vale 1,5 pontos) Dados os elementos $v_1,\ldots,v_r$ de um espaço vetorial V, mostre que se é injetiva a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & R^r & \to & V \\ & (a_1,\ldots,a_r) & \mapsto & a_1v_1+\cdots a_rv_r \end{array}$$

então $v_1,\ldots,v_r$ são linearmente independentes.

Uma solução:

Prova:

$$\begin{aligned} a_1v_1+\cdots+a_rv_r=0_v &\Rightarrow \varphi(a_1,\ldots,a_r)=0_v \\ &\Rightarrow \varphi(a_1,\ldots,a_r)=\varphi(0,\ldots,0) \\ &\overset{hip.}{\Rightarrow}(a_1,\ldots,a_r)=(0,\ldots,0) \\ &\Rightarrow a_1=\cdots=a_r=0 \\ &\Rightarrow v_1,\ldots,v_r \quad \text{são} \quad l.i \end{aligned}$$