UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA
ESCOLA NORMAL SUPERIOR - ENS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

Soluções da 1ª Prova Parcial de Álgebra Linear – PROVA A - 2017/1

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. Seja a matriz definida por $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}=(i-1)n+j$.

a) (vale 1,0 ponto) Escreva A.

b) (vale 1,0 ponto) Justifique o fato de ser $\det A=0$ quando $n\geq 3$.

Uma solução:

a)

$$A=\left(a_{ij}\right)_{nxn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & a_{3(n-1)} & a_{3(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \ddots & 3n-1 & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2-1 & n^2 \end{pmatrix}.$$

b) Para $n=1$ e $n=2$ temos $\det A=1$ e $\det A=-2$. Seja $n\geq 3$, usando o teorema de Jacobi temos que

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \ddots & 3n-1 & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix} \overset{L_3\leftarrow L_3+(-L_2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ n & n & \ddots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2+(-L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \\ n & n & \ddots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix}.$$

Logo, $\det A=0$, pois tem linhas iguais.

02. (vale 1,0 + 1,5 = 2,5 pontos) Defina Subespaço Vetorial. **Mostre que** o conjunto $W=\left\{A\in M_{nxn};A^t=-A\right\}$ das matrizes antissimétricas $n\times n$ é um subespaço do espaço vetorial M_{nxn} das matrizes $n\times n$.

Uma solução:

Definição de Subespaço: Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço de V quando $0_v\in W$ e $u+\lambda v\in W$ para todo $u,v\in W$ e $\lambda\in\mathbb{R}$.

Mostrando que $W = \{A \in M_{nxn}; A^t = -A\}$ **é um subespaço de** M_{nxn}**:**

Vejamos:

$i)$ $\bar{0} \in W$, uma vez que $(\bar{0})^T = \bar{0} = -(\bar{0})$.

$$ii) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad A, B \in W \Rightarrow (A+\lambda B)^T = A^T + (\lambda B)^T = -A + \lambda(-B) = -(A+\lambda B)$$

$$\Rightarrow A + \lambda B \in W$$

Logo, W é um subespaço.

03. (vale 1,5 pontos) Mostre que qualquer subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

Uma solução:

Prova: Seja $\dim V = n$ e $B = \{v_1, v_2, ..., v_t\}$ um conjunto de vetores linearmente independente de V. Se B gera V então não temos nada a fazer. Caso contrário, existe $v_{t+1} \in V$ que não é combinação linear dos elementos de B. Assim, tomando-se o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_t, v_{t+1}\}$ temos que ele é linearmente independe. E temos somente duas possibilidades a considerar, ele pode gerar V, e assim obtemos uma base para V, ou pode não gerar V. Para o segundo caso prosseguimos com o mesmo argumento e após finitos passos, já que a quantidade de vetores não pode ultrapassar a dimensão de V, encontraremos uma base para V que contém os vetores $v_1, v_2, ..., v_t$, e isto completa a demonstração.

04. Dados $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (3,-1,4)$:

a) (vale 0,5 ponto) Os vetores v_1 e v_2 geram o R^3? **Justifique.**

b) (vale 1,0 ponto) Seja v_3 um terceiro vetor do R^3. Quais as condições sobre v_3, para que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de R^3?

c) (vale 1,0 ponto) Encontre um vetor v_3 que complete junto com v_1 e v_2 uma base do R^3. **Justifique.**

Uma solução:

a) Não, pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

b) O vetor v_3 não pode ser combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

c) Seja $v_3=(x,y,z)$ então deve ocorrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} \neq 0$. Assim, devemos ter $5x-y-4z\neq 0$. Logo, entre infinitos exemplos, podemos tomar, $v_3=(0,0,1)$.

05. (Vale 1,5 pontos) Dados os elementos $v_1,\ldots,v_r$ de um espaço vetorial V. Mostre que se esses são linearmente independentes então é injetiva a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & R^r & \to & V \\ & (a_1,\ldots,a_r) & \mapsto & a_1v_1+\cdots a_rv_r. \end{array}$$

Uma solução:

$$\begin{aligned} \varphi(a_1,\ldots,a_r)=\varphi(b_1,\ldots,b_r) &\Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_rv_r=b_1v_1+\cdots+b_rv_r \\ &\Rightarrow (a_1-b_1)v_1+\cdots+(a_r-b_r)v_r=0_v \\ &\overset{hip.}{\Rightarrow} (a_1-b_1)=\cdots=(a_r-b_r)=0 \\ &\Rightarrow a_1=b_1,\ldots,a_r=b_r \\ &\Rightarrow (a_1,\ldots,a_r)=(b_1,\ldots,b_r) \\ &\Rightarrow \varphi \quad \acute{e} \quad injetiva. \end{aligned}$$