UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Soluções da 1ª Prova Parcial de Álgebra – Curso de Férias – 2017/3

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. (vale 1,0 ponto) Defina Grupo e Ordem de Elemento de Um Grupo.

Uma solução:

Grupo: É uma estrutura algébrica formada por um conjunto não vazio G e uma operação interna $*: G \times G \to G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) Associativa ($a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall \quad a,b,c \in G$),

ii) Existência da Identidade ($\exists \quad e \in G; \quad a*e=e*a=a \quad \forall \quad a \in G$)

iii) Existência do Inverso ($\exists \quad a' \in G; \quad a*a'=a'*a=e \quad \forall \quad a \in G$)

Ordem de Elemento de Um Grupo: Seja $(G,*)$ um grupo e $a \in G$. Então a ordem de a é o menor inteiro positivo n tal que $a^n = e$. Se este valor não existe, então o elemento tem ordem infinita.

Representação: $|a| = \min\{n \in N^*; a^n = e\}$

02. (vale 2,0 ponto) Seja o grupo $(Z \times Z,*)$, onde Z é o conjunto dos números inteiros e (*) é a operação:

$$(a,b)*(m,n)=(a+m,(-1)^m \cdot b+n),\ a,b,m,n \in Z$$

Encontre o elemento identidade (e) e o elemento inverso de $a \in Z \times Z$.

Uma solução:

Elemento identidade (e): Faça $e=(e_1,e_2)$, temos:

$$(a,b)*(e_1,e_2)=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a+e_1=a \\ b=(-1)^{e_1} \cdot b+e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1=0 \\ b=(-1)^0 \cdot b+e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1=0 \\ e_2=0 \end{cases} \Rightarrow e=(0,0)$$

Elemento inverso: Seja $(a,b) \in Z \times Z$. Sendo (p,q) seu inverso, temos:

$$(a,b)*(p,q)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+p=0 \\ (-1)^p \cdot b+q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-a \\ q=-(-1)^{-a} \cdot b \end{cases} \Rightarrow (p,q)=(-a,-(-1)^{-a} \cdot b)$$

03. Denote por α a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in (S_7, \circ).$$

a) (vale 1,0 ponto) Mostre que $|\alpha| = 6.$

Uma solução:

Como

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

então

$$\alpha^6 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \right]^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

b) (vale 1,0 ponto) Encontre o resultado de $\underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha \circ \alpha}_{2018\text{–}vezes}.$

Uma solução:

$$\underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha \circ \alpha}_{2018\text{–}vezes} = \alpha^{2018} \overset{x \in N}{=} \alpha^{6x+2} = \left(\alpha^6\right)^x \circ \alpha^2 = e \circ \alpha^2 = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

04. (vale 2,0 pontos) Prove que se todos os elementos de um grupo G são de ordem 2 então G é abeliano.

Uma solução:

$$|G| = 2 \Rightarrow x^2 = e \quad \forall \quad x \in G \Rightarrow x * y = x * (x * y)^2 * y$$

$$= x * x * y * x * y * y$$

$$= x^2 * y * x * y^2$$

$$= e * y * x * e$$

$$= y * x, \quad \forall \quad x, y \in G$$

$$\Rightarrow G \quad é \quad abeliano$$

05. (vale 1,5 pontos) Defina centro de um grupo G. **Mostre** que $Z(G) < G$.

Uma solução:

Centro de um grupo G: É o conjunto formado pelos elementos de G que comutam com todos os elementos de G.

$$Z(G) = \left\{ x \in G; x * a = a * x, \quad \forall \quad a \in G \right\}$$

O centro é subgrupo de G: Primeiramente note que $Z(G) \subset G$ pois $Z(G)$ é formado por elementos de G e também $Z(G) \neq \emptyset$ pois $e \in Z(G)$, já que $e * a = a * e \quad \forall \quad a \in G$

Por último, sejam $a, b \in Z(G)$ então temos que:

$$\begin{aligned} a * b' * x &= a * b' * x * e = a * b' * x * b * b' \\ &= a * b' * b * x * b' \\ &= a * e * x * b' \\ &= a * x * b' \\ &= x * a * b', \quad \forall \quad x \in G \end{aligned}$$

Logo $a * b' \in Z(G)$. Portanto $Z(G) < G$.

06. (vale 1,5 pontos) Seja G um grupo e $a \in G$. **Mostre que:**

$$\text{Se } |a| = 2017 \text{ então } \langle a \rangle = \{e = a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{2016}\}.$$

Uma solução:

Claramente temos que $\{e = a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{2016}\} \subset \langle a \rangle$ pois $\langle a \rangle = \{a^m; m \in Z\}$. Por outro lado, se $a^k \in \langle a \rangle$ então existem inteiros r e q, $0 \leq r < 2017$, tal que

$a^k = a^{2017q+r} = (a^{2017})^q * a^r = e^q * a^r = e * a^r = a^r \in \{e = a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{2016}\}$. Isto é $\langle a \rangle \subset \{e = a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{2016}\}$.

Logo,

$$\langle a \rangle = \{e = a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{2016}\}.$$