Soluções da Prova Final de Álgebra – Curso de Férias – 2017/3

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. (vale 2,5 pontos) Sejam H_1 e H_2 subgrupos de um grupo G. **Prove** que $H_1 \cap H_2 < G$.

Uma solução:

Prova: Como $H_1 < G$ e $H_2 < G$ então $H_1, H_2 \subset G$. Logo $H_1 \cap H_2 \subset G$. Por $e_G \in H_1, H_2$ temos que $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$. E, se $a,b \in H_1 \cap H_2$ então $a,b \in H_1$ e $a,b \in H_2$, e pela hipótese dada temos que $a * b' \in H_1 \cap H_2$. Portanto, $H_1 \cap H_2 < G$.

02. Seja $(R[x],+)$ o grupo de todos os polinômios de coeficientes reais sob a operação usual de adição. Seja $\phi : (R[x],+) \to (R[x],+)$ definida por $\phi(f) = f^{'}$ (derivada de f).

i) (vale 1,25 pontos) Mostre que ϕ é um homomorfismo.

Uma solução:

$$f, g \in R[x] \Rightarrow \phi(f+g) = (f+g)^{'} = f^{'} + g^{'} = \phi(f) + \phi(g) \Rightarrow \phi \quad \acute{e} \quad um \quad \text{homomorfismo}$$

ii) (vale 1,25 pontos) Encontre $Ker(\phi)$.

Uma solução:

$$f \in R[x] \quad e \quad \phi(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{'} = 0 \quad \Rightarrow \quad f \quad \acute{e} \quad constante \quad \Rightarrow \quad Ker(f) = \left\{ f \in R[x]; f \quad \acute{e} \quad constante \right\}$$

03. (vale 2,5 pontos) Verifique se a estrutura $\left(H = \{a + b\sqrt[3]{2} \in R^*; a,b \in Q\}, \cdot\right)$ é subgrupo de $G = (R^*, \cdot)$. **Justifique.**

Uma solução:

Não, pois a operação não é fechada.

Se tomarmos $h_1 = 1 + \sqrt[3]{2} \in H$ e $h_2 = 1 - \sqrt[3]{2} \in H$ temos que

$$h_1 \cdot h_2 = (1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}) = 1 - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \notin H.$$

04. (vale 2,5 pontos) Seja a aplicação $f:(Z,+)\rightarrow(\{-1,1\},\cdot)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & se \quad x \quad é \quad par \\ -1 & se \quad x \quad é \quad ímpar \end{cases}.$$

i) (vale 1,25 pontos) Mostre que f é um homomorfismo.

Uma solução:

Sejam $x,y\in Z$. Temos três casos a considerar:

i) Se $x \quad e \quad y \quad são \quad pares$, então:

$f(x+y)=f(2p+2q)=f(2(p+q))=1=1\cdot 1=f(2p)\cdot f(2q)=f(x)\cdot f(y)$, com p e q inteiros.

ii) Se $x \quad e \quad y \quad são \quad ímpares$, então:

$f(x+y)=f(2m+1+2n+1)=f(2(m+n+1))=1=(-1)\cdot(-1)=f(2m+1)\cdot f(2n+1)=f(x)\cdot f(y)$, com m e n inteiros.

iii) Se $x \quad é \quad par(ímpar) \quad e \quad y \quad é \quad ímpar(par)$, então:

$f(x+y)=f(2r+2s+1)=f(2(r+s)+1)=-1=1\cdot(-1)=f(2r)\cdot f(2s+1)=f(x)\cdot f(y)$, com r e s inteiros.

Logo, de qualquer maneira temos que f é um homomorfismo.

ii) (vale 1,25 pontos) Encontre $Ker(f)$.

Uma solução:

$$x\in Z \quad e \quad f(x)=1 \;\Rightarrow\; x \quad é \quad par \;\Rightarrow\; Ker(f)=\left\{x\in Z; x \quad é \quad par\right\}.$$