UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA
ESCOLA NORMAL SUPERIOR - ENS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

Disciplina: Álgebra Linear	**Valor Total: 10,0**
Prof.: Alessandro Monteiro	
Aluno(a): GABARITO	
Prova Final	**Data: 24 de Junho de 2017**
Curso: Licenciatura em Matemática	**Período: 2017/1**

Critérios de Avaliação:

- Não é permitido **fazer perguntas** a respeito da resolução da prova ao professor.
- O Aluno só poderá entregar a prova **60 minutos** após o início da mesma.
- Essa avaliação é **individual** e sem consulta.
- Somente o verso desta folha e o espaço em branco abaixo das questões **poderão ser usados** como **rascunho**.
- Todas as respostas devem ser colocadas **à caneta** na coluna 2 ao lado das perguntas.
- É proibido o uso de aparelhos **celulares ou similares**.
- Todo material do aluno é de uso **individual**, sendo proibido qualquer tipo de empréstimo.

QUESTÕES	RESPOSTAS
01. (vale 1,0 + 1,5 = 2,5 pontos) Defina Transformação Linear. **Determine m** e **n** e a **transformação linear** $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $$T(1,2)=(3,1,1) \quad e \quad T(1,1)=(1,-1,0).$$ *Rascunho!*	**Definição:** Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear de V em W é uma função $T:V\to W$ que possui as seguintes propriedades: i) $T(u+v)=T(u)+T(v), \forall \; u,v\in V$; ii) $T(\alpha v)=\alpha T(v), \forall \; v\in V \;\; e \;\; \alpha\in\mathbb{R}$. **m =** 3 **n =** 2 **T(x,y) =** $(-x+2y,-3x+2y,y-x)$
02. (vale 2,5 pontos) Encontre a matriz de $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z)=(x+y,x-z)$ com relação às bases $\alpha=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\beta=\{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. **Justifique.** *Rascunho!*	**Matriz de T:** $[T]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ **Justificativa:** A matriz pedida tem dimensão 2x3 uma vez que $\dim\mathbb{R}^2=2$ e $\dim\mathbb{R}^3=3$, e também temos que: *i)* $T(1,0,0)=(1,1)=1(1,1)+0(0,1)$ *ii)* $T(0,1,0)=(1,0)=1(1,1)+(-1)(0,1)$ *iii)* $T(0,0,1)=(0,-1)=0(1,1)+(-1)(0,1)$

03. (vale 2,5 pontos) Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x,y)=(4x-y,2x+y)$. **Encontre** os autovalores e autovetores de T. **Justifique.**

Rascunho!

Autovalores: $\lambda_1=2$ *e* $\lambda_2=3$

Autovetores:

i) Associados a $\lambda_1=2$: $\{(x,2x);x\in\mathbb{R}^*\}$

ii) Associados a $\lambda_2=3$: $\{(x,x);x\in\mathbb{R}^*\}$

Justificativa:

Considerando α a base canônica do $\mathbb{R}^2$ temos:

$$[T]_\alpha^\alpha-\lambda I_2=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda&-1\\2&1-\lambda\end{pmatrix}.$$

Assim, $P_T(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$, cujas raízes são $\lambda_1=2$ *e* $\lambda_2=3$. Para $\lambda=2$ temos que

$$\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=2x$$

e para $\lambda=3$ temos que

$$\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=x.$$

04. (vale 2,5 pontos) Defina $T:P_n\to P_n$ por $T(p(x))=p+\dfrac{dp}{dx}$. **Prove** que T é um isomorfismo.

Rascunho!

Prova: Basta mostrarmos que $\dim KerT=0$, pois isso é suficiente para T ser injetiva. E também ser sobrejetiva, pois pelo Teorema do Núcleo e da Imagem teremos

$$\dim P_n=\dim KerT+\dim \operatorname{Im}T=\dim\operatorname{Im}T.$$

Para isso seja $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

Temos:

$$T(p(x))=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1})$$
$$=a_0+a_1+(a_1+2a_2)x+\cdots+(a_{n-1}+na_n)x^{n-1}+a_nx^n$$

Assim, se for $T(p(x))=0$ teremos

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0\Rightarrow p(x)=0\Rightarrow KerT=\{0\}.$$

Logo, $\dim KerT=0$.