UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA

ESCOLA NORMAL SUPERIOR - ENS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

Soluções da 1ª Prova Parcial de Álgebra – Noturno – 2016/2

Prof. MSc. Alessandro Monteiro

01. Defina:
i) (vale 0,5 ponto) Monoide.

Uma solução: Seja G um conjunto não vazio e $*$ uma operação fechada em G. A estrutura $(G,*)$ é chamada de Monoide quando $*$ goza das propriedades associativa e Existência da Identidade.

ii) (vale 0,5 ponto) Grupo Abeliano.

Uma solução: É um Monoide munido das propriedades Comutativa $(a*b=b*a\ \forall\ a,b\in G)$ e Existência do Inverso $(\exists\ a'\in G;\ a*a'=a'*a=e\ \forall a\in G)$.

iii) (vale 1,0 ponto) Verifique se a estrutura $(M,*)$ é um grupo, onde

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a,b\in R \ \ e \ \ a,b\neq 0\right\}$$ e (*) é a operação usual de multiplicação.

Uma solução: Não é um grupo, pois não existe identidade em $(M,*)$. A possível identidade seria $e=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mas, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Note também que no cálculo da identidade percebe-se que e depende de a e b.

02. (vale 2,0 pontos) Defina ordem de um elemento de um grupo G. **Prove que:** Se G é um grupo finito então existe um inteiro positivo k tal que $x^k=e$ para todo $x\in G$.

Uma solução: Seja G um grupo. A ordem de um elemento $x\in G$ é o menor natural k positivo tal que $x^k=e$.

Prova ($\exists\ k\ positivo;\ x^k=e$ para todo $x\in G$): Tome k igual ao produto das ordens dos finitos elementos de G, claramente tem-se que $x^k=e$.

03. Seja o grupo $(Z_{2015},+)$.
a) (vale 1,0 ponto) Ele é cíclico? Quantos geradores tem esse grupo? **JUSTIFIQUE.**

Uma solução: Sim, pois, por exemplo, $(Z_{2015},+)=<\bar{1}>$. E tem $\varphi(2015)=\varphi(5\cdot 13\cdot 31)=4\cdot 12\cdot 30=1440$ geradores.

b) (vale 1,0 ponto) Encontre $|\overline{15}|$. **JUSTIFIQUE.**

Uma solução: $|\overline{15}| = \dfrac{2015}{(2015,15)} = \dfrac{2015}{5} = 403$.

04. (vale 2,0 pontos) Defina subgrupo. **Dê um exemplo** de dois subgrupos de um grupo G cuja união não seja subgrupo de G. **JUSTIFIQUE.**

Uma solução: Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um subgrupo de G se for ele próprio um grupo com a mesma operação de G.

Exemplo: Sejam o grupo $(Z,+)$ e dois de seus subgrupos $H_1 = (2Z,+)$ e $H_2 = (3Z,+)$. Temos que $H_1 \cup H_2 = \{0,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\ldots\}$ não é subgrupo de Z. Note que, por exemplo, $2+3=5 \notin H_1 \cup H_2$.

05. (vale 2,0 pontos) Prove que um grupo G é abeliano **se e somente se** a aplicação $f: G \to G$, definida por $f(x) = x^2$ é um homomorfismo.

Uma solução:

$(\Rightarrow)$: $a,b \in G$, G abeliano $\Rightarrow f(a*b) = (a*b)^2 \overset{hip.}{=} a^2 * b^2 = f(a) * f(b) \Rightarrow$ f é um homomorfismo.

$(\Leftarrow)$: $a,b \in G$, f é um homomorfismo $\Rightarrow f(a*b) = f(a)*f(b) \Rightarrow (a*b)^2 = a^2 * b^2 \Rightarrow a*b*a*b = a*a*b*b \Rightarrow a*b = b*a \Rightarrow$ G é abeliano.

06. (Extra – vale 1,0 ponto) Encontre o MDC de 878787878787 e 787878787878. **JUSTIFIQUE.**

Uma solução:

$$\begin{cases} x = 787878787878 = 78 \cdot 10101010101 = 3 \cdot 26 \cdot 10101010101 \\ y = 878787878787 = 87 \cdot 10101010101 = 3 \cdot 27 \cdot 10101010101 \end{cases} \overset{(26,27)=1}{\Rightarrow} (x,y) = 30303030303.$$