

---

Universidade do Estado do Amazonas  
Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MN

Professor Alessandro Monteiro

AP1

---

**Instruções:** Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

**Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.**

Nome: \_\_\_\_\_

*Gabarito*

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 26 de janeiro de 2023

I. Questões

II. Respostas à Caneta

**01 (vale 0,2 ponto cada item).** Analise cada sentença abaixo e classifique em V, se for verdadeira, e F se for falsa:

I.  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$ .

II.  $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$ ;

III. A relação  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(n) = n+1$  é uma função sobrejetiva. Lembre-se que:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

IV. Uma função  $f: X \rightarrow Y$  é bijetiva quando:

$$\forall y \in Y \exists! x \in X; f(x) = y.$$

V. Todo subconjunto não vazio dos números naturais possui um menor elemento.

VI.  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

VII. Um conjunto  $X$  é finito quando é vazio ou quando existe uma bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

VIII. Um conjunto  $X$  é enumerável quando é vazio ou quando existe uma bijeção  $f: I_n \rightarrow X$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

IX. Seja  $X \subset \mathbb{N}$  não vazio. Se  $X$  é finito então  $X$  é limitado.

X. O conjunto  $\mathbb{R}$  é não enumerável.

Respostas:

I. (V)

II. (V)

III. (F)

IV. (V)

V. (V)

VI. (V)

VII. (F)

VIII. (F)

IX. (V)

X. (V)

(Z)  $x \in \mathbb{R}$  e  $y = 1-x \Rightarrow x+y = 1 > 0$

(ZZZ)  $f(n) = 1 \Rightarrow n = 0 \notin \mathbb{N}$

(VII)  $X = \emptyset$  ou  $f: I_n \rightarrow X$

(VII)  $X$  finito ou  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$    
 *bij.*   
 *bij.*

**02 (vale 2,0 pontos).** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mostre que se  $|a-b| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , então  $a = b$ .

**Demonstração: (POR ABSURDO)**

Suponha que  $|a-b| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$  e  $a \neq b$ . Assim,  $|a-b| > 0$ . Tomando-se  $\varepsilon = |a-b|$ , temos que  $|a-b| < |a-b|$ . Uma contradição, logo,  $a = b$ .

**03 (vale 2,0 pontos).** Use indução matemática para provar que se  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  então é válido que  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ .

**Demonstração:**

Seja a proposição

$$P(n): |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Temos que  $P(1)$  e  $P(2)$  são verdadeiras, uma vez que  $|x_1| \leq |x_1|$  e  $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$  (desigualdade triangular).

Supondo que  $P(k)$ ,  $k \geq 2$ , seja verdadeira, temos:

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}| &\stackrel{P(k)}{\leq} |x_1 + \dots + x_k| + |x_{k+1}| \\ &\stackrel{P(k)}{\leq} |x_1| + \dots + |x_k| + |x_{k+1}|. \end{aligned}$$

Logo,  $P(k+1)$  também é verdadeira.

Portanto,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**04 (vale 2,0 pontos).** Defina função sobrejetiva. Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos finitos. Encontre a quantidade de funções sobrejetivas de  $X$  em  $Y$  sabendo-se que  $|X|=6$  e  $|Y|=3$ .

**Definição:**

$$f: X \rightarrow Y, f \text{ é sobrej.} \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X; \\ f(x) = y.$$

**Resposta:**  $|\text{Sobrej}(X, Y)| = 540$

**Justificativa:**

$$\sum_{i=1}^{|Y|} (-1)^{|Y|-i} \binom{|Y|}{i} \cdot i^{|X|}$$


---


$$3 - 192 + 729 = 540.$$

**05 (vale 2,0 pontos).** Seja  $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$  para  $x \in [-3, 3]$ . Encontre o número  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $-3 \leq x \leq 3$ .

**Resposta:**  $M = 34$ .

**Justificativa:**

$$\textcircled{1} -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3 \quad \textcircled{I}$$

$$\textcircled{2} f(x) = 2x^2 - 3x + 7 \Rightarrow |f(x)| = |2x^2 - 3x + 7|$$

$$\textcircled{D.T} \leq 2|x|^2 + 3|x| + 7$$

$$\textcircled{I} \leq 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 7$$

$$= 18 + 9 + 7$$

$$= 34.$$