Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 25 de janeiro de 2023

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**
01 (vale 0,2 ponto cada item). Analise cada sentenças abaixo e classifique em V, se for verdadeira, e F se for falsa: **I.** $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x.$ **II.** $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; **III.** A relação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n-1$ é uma função. Lembre-se que: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. **IV.** Uma função $f : X \to Y$ é bijetiva quando: $\forall\, y \in Y\ \exists!\, x \in X;\ f(x) = y.$ **V.** Todo subconjunto não vazio dos números naturais possui um maior elemento. **VI.** $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ **VII.** Um conjunto X é finito quando é vazio ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. **VIII.** Um conjunto X é enumerável quando é vazio ou quando existe uma bijeção $f : I_n \to X$ para algum $n \in \mathbb{N}$. **IX.** Seja $X \subset \mathbb{N}$ não vazio. Se X é finito então X é limitado. **X.** O conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável.	Respostas: **I.** (V) **II.** (V) **III.** (F) **IV.** (V) **V.** (F) **VI.** (V) **VII.** (F) **VIII.** (F) **IX.** (V) **X.** (V) I $x=-1$ e $y \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 \geq 0 > x$. III $f(1) = 1-1 = 0 \notin \{1, 2, 3, \ldots\}$ V $\{2, 4, 6, \ldots\}$ VII $\underbrace{f : I_n \to X}_{\text{bij.}}$ VIII finito ou $\underbrace{f : \mathbb{N} \to X}_{\text{bij.}}$
02 (vale 2,0 pontos). Seja $x \in \mathbb{R}$ e não negativo. Prove que $x < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = 0$.	**Demonstração:** (ABSURDO) Suponha que $x < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ e $x \neq 0$. Assim, temos que $x > 0$, pois $x \geq 0$ (não negativo). Tomando-se $\varepsilon = x > 0$, temos também que $x < x$. Uma contradição. Portanto, $x = 0$.

03 (vale 2,0 pontos). Use indução matemática para provar que se $n \geq 1$ então n^3+5n é sempre divisível por 6.	**Demonstração:** Seja a proposição $P(n): 6 \mid n^3+5n, \forall n \geq 1.$ Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois $6 \mid 1^3+5.1 = 6.$ Supondo que $P(k)$ seja verdadeira, $k \geq 1$, temos também que: $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+5k+5$ $= k^3+5k+3k(k+1)+6$ $\overset{P(k)}{=} 6r+3k(k+1)+6, r \in \mathbb{N}.$ Mas, como um dos números consecutivos k ou $k+1$ deve ser par, então $6r+3k(k+1)+6 = 6r+6s+6, r,s \in \mathbb{N}.$ Ou seja, $6 \mid (k+1)^3+5(k+1)$. Logo, $P(k+1)$ também é verdadeira. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

04 (vale 2,0 pontos). Defina função sobrejetiva. Sejam X e Y conjuntos finitos. Encontre a quantidade de funções sobrejetivas de X em Y sabendo-se que $\lvert X \rvert = 6$ e $\lvert Y \rvert = 3$.	**Definição:** Uma função $f: X \to Y$ é sobrejetiva se, e somente se, para cada $y \in Y$ existir $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto é, $Im(f) = CD(f)$.
	Resposta: $\lvert Sobrej(X,Y) \rvert =$ 540 **Justificativa:** $\sum_{i=1}^{\lvert Y \rvert} (-1)^{\lvert Y \rvert - i} \cdot \binom{\lvert Y \rvert}{i} \cdot i^{\lvert X \rvert}$ $= 3 - 192 + 729 = 540$
05 (vale 2,0 pontos). Seja $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$ para $x \in [-2,2]$. Encontre o número L tal que $\lvert f(x) \rvert \leq L$ para todo $-2 \leq x \leq 2$.	**Resposta:** $L =$ 21. **Justificativa:** Temos que: $\lvert f(x) \rvert = \lvert 2x^2 - 3x + 7 \rvert$ $\overset{D.T}{\leq} \lvert 2x^2 \rvert + \lvert 3x \rvert + \lvert 7 \rvert$ $= 2 . \lvert x \rvert^2 + 3 . \lvert x \rvert + 7.$ Se $-2 \leq x \leq 2$ então $\lvert x \rvert \leq 2$. Logo, $\lvert f(x) \rvert \leq 2 . 2^2 + 3 . 2 + 7 = 21.$