Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MN

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 02 de Março de 2023

<table>
<tr><th>I. Questões</th><th>II. Respostas à Caneta</th></tr>
<tr><td>
01 (vale 2,0 pontos). Suponha que a proposição:

“Se gosto de Matemática então gosto de Análise Real”

seja FALSA. V F

Identifique quais das proposições abaixo são verdadeiras:

I. Se não gosto de Matemática então não gosto de Análise Real.

II. Gosto de Matemática e não gosto de Análise Real.

III. Não gosto de Matemática ou não gosto de Análise Real.

IV. Se não gosto de Análise Real então não gosto de Matemática.

V. Ou não gosto de Análise real ou gosto de Matemática.
</td><td>
Circule as proposições Verdadeiras:

I
II
III
IV
V
</td></tr>
<tr><td>
02 (vale 0,2 ponto cada item). Analise cada sentenças abaixo e classifique em V, se for verdadeira, e F se for falsa:

I. O intervalo $(0,1)$ é ~~enumerável~~;

II. Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável;

III. O conjunto $\{-1,2,-3,4,-5,6,-7,8,\ldots\}$ é ~~não~~ enumerável;

IV. O conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ é enumerável;

V. Todo subconjunto não vazio dos números reais, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$;

VI. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexo é um ~~corpo ordenado~~;

VII. Toda sequência monótona é convergente;

VIII. Toda sequência convergente é de Cauchy;

IX. O supremo de $\{x\in\mathbb{R};\ x^2 - 2023 = 0\}$ é $\sqrt{2023}$;

X. O ínfimo de $(2021, 2023]$ é 2022.
</td><td>
Respostas:

I. (F)
II. (V)
III. (F)
IV. (V)
V. (V)
VI. (F)
VII. (F)
VIII. (V)
IX. (V)
X. (F)

III $f: \mathbb{N} \to X$, $f(n) = \begin{cases} n, & n: \text{par} \\ -n, & n: \text{ímpar} \end{cases}$

V Axioma do supremo

VII $(1,2,3,4,\ldots)$ DIVERGE

IX $\{-\sqrt{2023}, \sqrt{2023}\}$

X $\inf (2021, 2023] = 2021$
</td></tr>
</table>

03. Seja A um conjunto não vazio e limitado inferiormente, e $\alpha \in \mathbb{R}$. **i) (vale 1,5 ponto)** Mostre que $\inf(\alpha + A) = \alpha + \inf(A)$. **ii) (vale 0,5 ponto)** Encontre o $\inf(2023 + A)$, onde $A = \{1, 2, 3\}$.	**Demonstração (i):** Se $A \neq \emptyset$ então existe $a \in A$. Assim, $\alpha + A \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Como A é limitado inferiormente, então existe $\inf A$, e $\inf A \leq a, \forall a \in A$. E disso, temos que $\alpha + \inf A \leq \alpha + a, \forall \alpha + a \in \alpha + A$. Logo, $\alpha + \inf A$ é cota inferior para $\alpha + A$. E também, $\inf(\alpha + A)$ existe, e $\inf(\alpha + A) \geq \alpha + \inf A$. Por ser, $\inf(\alpha + A) \leq \alpha + a$, $\forall a \in A$, temos que, $\inf(\alpha + A) - \alpha \leq a, \forall a \in A$. Assim, $\inf(\alpha + A) - \alpha \leq \inf A$. Ou seja, $\inf(\alpha + A) \leq \alpha + \inf A$. Portanto, segue que $\inf(\alpha + A) = \alpha + \inf A$.
	$\inf(2023 + A) =$ 2024 **Justificativa:** $\inf(2023 + A) = 2023 + \inf A$ $= 2023 + 1$ $= 2024$

04 (vale 2,0 pontos). Mostre, por definição, que a sequência $x_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ é convergente.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos pela P.A que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Deste modo, se

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Logo, $x_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ é convergente e $x_n \to 0$.

05 (vale 0,4 ponto cada item). Verifique se as sequências abaixo são convergentes ou divergentes? **Justifique!**

i) $x_n = \{(-1)^n\}$; $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$

ii) $x_n = \left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$;

iii) $x_n = \{n\}$;

iv) $x_n = \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$;

v) $x_n = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$.

i) ( ) convergente (X) divergente

Justificativa: $x_{2n-1} \to -1$ e $x_{2n} \to 1$

ii) (X) convergente ( ) divergente

Justificativa: $\underbrace{\cos n}_{\text{limit.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{converge p/ zero}} \longrightarrow 0$

iii) ( ) convergente (X) divergente

Justificativa: $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ é ilimitada

iv) (X) convergente ( ) divergente

Justificativa: $|x_n| \leq 1$ e $x_n > x_{n+1}$

v) (X) convergente ( ) divergente

Justificativa: $0 < \frac{1}{2^n} < \underbrace{\frac{1}{n} \to 0}_{\text{EXERC. 4}}$

TEOR. DO CONFRONTO