Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 01 de Março de 2023

<table>
<tr><th>I. Questões</th><th>II. Respostas à Caneta</th></tr>
<tr><td>
01 (vale 2,0 pontos). Suponha que a proposição:

“Gosto de Matemática se, e somente se, gosto de Análise Real” V F / F V

seja FALSA.

Identifique quais das proposições abaixo são verdadeiras:

I. Ou gosto de Matemática ou gosto de Análise Real. V

II. Não gosto de Matemática ou não gosto de Análise Real. V

III. Se não gosto de Matemática então gosto de Análise Real. V

IV. Não gosto de Matemática e não gosto de Análise Real. F

V. Se não gosto de Análise Real então gosto de Matemática. V
</td><td>
Circule as proposições Verdadeiras:

I
II
III
IV
V
</td></tr>
<tr><td>
02 (vale 0,2 ponto cada item). Analise cada sentenças abaixo e classifique em V, se for verdadeira, e F se for falsa:

I. O conjunto dos números transcendentes é não enumerável;
II. A união de conjuntos enumeráveis é enumerável;

III. O conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x^2+2023 = 0\}$ é ~~não~~ enumerável;

IV. O conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ é ~~não~~ enumerável;

V. O número complexo $2022+2023i$ é maior que o número complexo $2023+2022i$;

VI. O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, mas ~~não~~ é completo;

VII. Toda sequência limitada é convergente;

VIII. Toda sequência de Cauchy é convergente;

IX. O ínfimo de $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 2023 = 0\}$ é ~~-2023~~;

X. O supremo de $\{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ é 1.
</td><td>
Respostas:

I. (V)
II. (V)
III. (F)
IV. (F)
V. (F)
VI. (F)
VII. (F)
VIII. (V)
IX. (F)
X. (V)

III $\{x \in \mathbb{R};\ x^2+2023=0\} = \emptyset$.
V $\mathbb{C}$ é não ordenado
VII CONVERG. $\Rightarrow$ LIMITADA
IX $\{x \in \mathbb{R};\ x^2-2023=0\}$ $= \{-\sqrt{2023}, \sqrt{2023}\}$
X $\cos n \in [-1, 1]$
</td></tr>
</table>

03. Sejam A e B conjuntos não vazios e limitados inferiormente. **i) (vale 1,5 ponto)** Mostre que $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$. **ii) (vale 0,5 ponto)** Encontre o $\inf(A \cup B)$, onde $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,4,5\}$.	**Demonstração:** Sejam A e B não vazios e limitados inferiormente. Suponha, sem perda de generalidade, que $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf A.$ Temos: (i) $c \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} c \in A \\ \text{ou} \\ c \in B \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} c \in A \Rightarrow \inf A \leq c \\ c \in B \Rightarrow \inf A \leq \inf B \leq c \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \{ \inf A \leq c, \forall\, c \in A \cup B.$ Logo, $\inf A$ é cota inferior para $A \cup B$. (ii) Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Então $\inf A + \varepsilon > a$ para algum $a \in A$ ($a \in A \cup B$). Assim, $\inf A$ é a maior das cotas inferiores para $A \cup B$. Portanto, $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$
	$\inf(A \cup B) =$ 1 **Justificativa:** $\inf(A \cup B) \overset{(i)}{=} \min\{1,3\}$ $= 1.$

04 (vale 2,0 pontos). Mostre, por definição, que a sequência $x_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ é convergente.

$1 - 5 - 9$

x $\quad a_n = 1 + (n-1).4$

$\frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$

$= 4n-3$

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Pela propriedade arquimediana, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Logo, $x_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ converge para zero.

05 (vale 0,4 ponto cada item). Verifique se as sequências abaixo são convergentes ou divergentes? **Justifique!**

i) $x_n = \left\{ sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}$; $= (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$

ii) $x_n = \left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$;

iii) $x_n = \{n\}$;

iv) $x_n = \left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$;

v) $x_n = \left\{ \frac{1}{n+5} \right\}$.

i) ( ) convergente (X) divergente

Justificativa: $x_{4n-3} \to 1$ e $x_{2n} \to 0$

ii) (X) convergente ( ) divergente

Justificativa: $\underbrace{\cos n}_{\text{limit.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{conv. p/ zero}} \to 0$

iii) ( ) convergente (X) divergente

Justificativa: $x_n = (1, 2, 3, 4, \dots)$: ilimitada

iv) (X) convergente ( ) divergente

Justificativa: $|x_n| \leq 1$ e $x_n > x_{n+1}$

v) (X) convergente ( ) divergente

Justificativa: $0 < \frac{1}{n+5} < \frac{1}{n} \to 0$ TEOR. DO CONFRONTO

EXERC 4