
Universidade do Estado do Amazonas

Matemática Elementar I – ESN0130

Professor Alessandro Monteiro

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existe cinco problemas, valendo um total de dez pontos. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: _____

Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 29 de Junho de 2023

I. Questões

II. Respostas à Caneta

01 (Vale 2,0 pontos)

a) Defina dízimas periódicas.

b) Analise cada sentença abaixo e classifique-a em V, se for verdadeira e F, caso seja falsa.

i) $0,3333 < \frac{1}{3} < 0,3334$

ii) $-\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 0,5 - 0,666... = -0,1666$

iii) $7 \cdot 0,142857 = 0,9999 = 0,9\bar{9}$

iv) $0, \underbrace{000\dots0}_{2023} \bar{9} = 10^{-2023}$

v) $\frac{1}{2^{2023}}$ é uma D.P.C

Justifique!

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Definição (a):

São números decimais inexatos onde os algarismos da parte não inteira são periódicos a partir de um certo ponto.

Exemplos:

① $0,202320232023\dots$

② $0,123420232023\dots$

b) (i) () V () F

Justificativa:

$$0,3333 < 0,3333\dots = \frac{1}{3} < 0,3334$$

b) (ii) () V () F

Justificativa:

$$-\frac{1}{6} = -0,1666\dots \neq -0,1666$$

b) (iii) () V () F

Justificativa:

$$1 = \frac{9}{9} = 0,9\bar{9} = 0,9999 = 7 \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot 0,142857$$

b) (iv) () V () F

Justificativa:

$$0, \underbrace{000\dots0}_{2023} \bar{9} = \frac{9}{\underbrace{9000\dots0}_{2023}} = \frac{1}{\underbrace{100\dots0}_{2023}} = 10^{-2023}$$

b) (v) () V () F

Justificativa:

$$\frac{1}{2^{2023}} = \frac{1}{2^{2023}} \cdot \frac{5^{2023}}{5^{2023}} = \frac{5^{2023}}{10^{2023}} \rightarrow \text{D.C}$$

02 (vale 2,0 pontos) Sejam a, b, c e d números reais.

a) Prove a Identidade de Lagrange:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2.$$

b) Sendo $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = \frac{\sqrt{3}}{2}$, qual o valor de $ad - bc$? Justifique.

a) Demonstração:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \\ &= \cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + \cancel{b^2c^2} + b^2d^2 - \cancel{a^2c^2} - 2acbd - \cancel{b^2d^2} \\ &= (ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2 \\ &= (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

■

Resposta (b): $\pm \frac{1}{2}$

Justificativa:

$$(a) \Rightarrow 1 \cdot 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (ad - bc)^2$$

$$1 - \frac{3}{4} = (ad - bc)^2$$

$$\therefore ad - bc = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}.$$

03 (vale 2,0 pontos). Sejam A, B, C, D e E números inteiros positivos tais que:

$$\frac{24}{5} = A + \frac{1}{B + \frac{1}{C+1}}$$

$$\text{e } \sqrt{D+2\sqrt{E}} = \frac{7}{\sqrt{8}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

Escolha uma entre as duas identidades acima e **encontre a soma** dos valores desconhecidos. Justifique.

Resposta: $A+B+C=8$, $D+E=35$.

Justificativa:

$$\begin{aligned} \frac{2A}{5} &= 4 + \frac{4}{5} = 4 + \frac{1}{\frac{5}{4}} \\ &= 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A+B+C = 4+1+3 = \boxed{8}.$$



$$\frac{7}{\sqrt{8}-1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{8}+1}}_{FR} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}}_{FR}$$

$$= \cancel{\sqrt{8}+1} + \cancel{\sqrt{3}-1}$$

$$= \sqrt{8} + \sqrt{3} \Rightarrow D=11 \text{ e } E=24$$

$$\Rightarrow D+E = \boxed{35}.$$

04 (vale 3,0 pontos) Sejam $A = \sqrt{6+2\sqrt{3}}$
e $B = \sqrt{33-19\sqrt{3}}$.

a) Quem é maior A ou B? Justifique.

b) Racionalize $\frac{A}{B}$. Justifique.

c) Reduza $\frac{A}{B}$ à uma soma ou diferença de radicais simples. Justifique.

a) Resposta: A

Justificativa:

$$\begin{aligned}6 + 2\sqrt{3} > 33 - 19\sqrt{3} &\Leftrightarrow 21\sqrt{3} > 27 \\&\Leftrightarrow 7\sqrt{3} > 9 \\&\Leftrightarrow 21 > 9\sqrt{3} \\&\Leftrightarrow \sqrt{441} > \sqrt{243}.\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{6+2\sqrt{3}} > \sqrt{33-19\sqrt{3}}.$$

b) Resposta: $\sqrt{52 + 30\sqrt{3}}$.

Justificativa:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(11\sqrt{3}-19)}} \\&= \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+2}{11\sqrt{3}-19} \cdot \frac{11\sqrt{3}+19}{11\sqrt{3}+19}} \\&= \sqrt{\frac{66+60\sqrt{3}+38}{2}} \\&= \sqrt{52+30\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

04 (continuação)

c) Resposta:

Justificativa:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \sqrt{52 + 30\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{52 + 2\sqrt{675}} \\ &= \sqrt{27} + \sqrt{25} \\ &= 5 + 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$675 = 3^3 \cdot 5^2$$

05 (vale 1,0 ponto) Considere os seguintes passos na resolução da equação:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3} = x+3 &\stackrel{(I)}{\Rightarrow} x+3 = x^2 + 3^2 \\ &\stackrel{(II)}{\Rightarrow} x^2 - x + 6 = 0 \\ &\stackrel{(III)}{\Rightarrow} (x+3)(x+2) = 0 \\ &\stackrel{(IV)}{\Rightarrow} S = \{-2, -3\}.\end{aligned}$$

O conjunto solução está correto, mas a resolução apresenta erros em alguns passos. Onde aconteceu o primeiro erro? Justifique.

O primeiro erro ocorreu no passo:

- I
 II
 III
 IV

Justificativa:

$$(x+3)^2 \neq x^2 + 3^2.$$