Universidade do Estado do Amazonas

Geometria II - ESN0440 – MV22

Professor Alessandro Monteiro

AP2 - Substitutiva

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

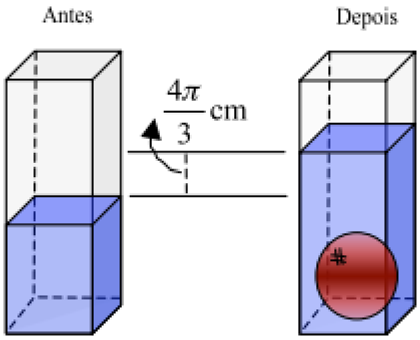
Manaus, 2 de agosto de 2023

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**

01 (vale 2,0 pontos).

a) Defina Esfera.

b) Um tanque com água possui a forma de um prisma quadrangular reto, cuja aresta da base mede 8,0 cm. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{4\pi}{3}$ cm, como mostrado na figura a seguir. Encontre a área da superfície esférica.



RASCUNHO

a) Definição:

Sejam dados um ponto O e uma medida $r>0$. Esfera de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a O é menor ou igual a r. Isto é, é o lugar geométrico dos pontos P do espaço tais que $\overline{PO} \leq r$.

b) Resposta:

$64\pi \text{ cm}^2$

Justificativa:

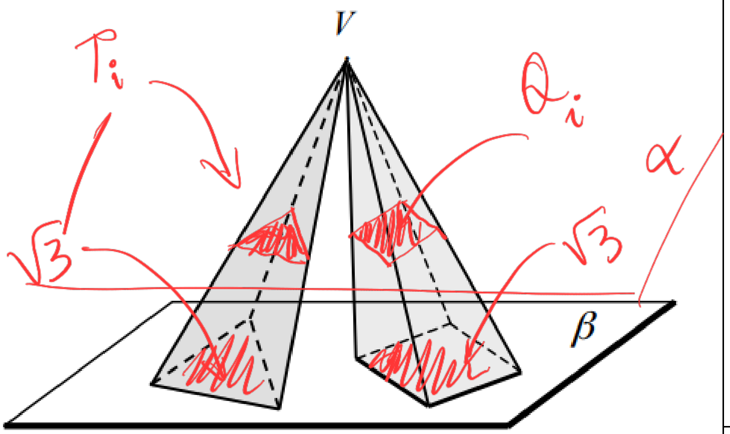
$$8^2 \cdot \cancel{\frac{4\pi}{3}} = \cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r^3 \Rightarrow r = 4$$

$$\Rightarrow A_S = 4\pi \cdot 4^2$$

02 (vale 2,0 pontos).

a) Enuncie o princípio de Cavalieri.

b) As bases das duas pirâmides de mesmo vértice são polígonos regulares e estão contidas no plano β.



Mostre que se as medidas das arestas do triângulo e quadrado das bases destas pirâmides são respectivamente 2 cm e $\sqrt[4]{3}$ cm, então estas pirâmides possuem o mesmo volume.

RASCUNHO

T_i: área do triângulo i

Q_i: área do quad. i

a) Princípio de Cavalieri:

Se dois sólidos sobre um plano β possuem áreas das bases e alturas congruentes, e todo plano α secante a eles e paralelo a β determina secções congruentes nestes sólidos, então eles possuem o mesmo volume.

b) Demonstração;

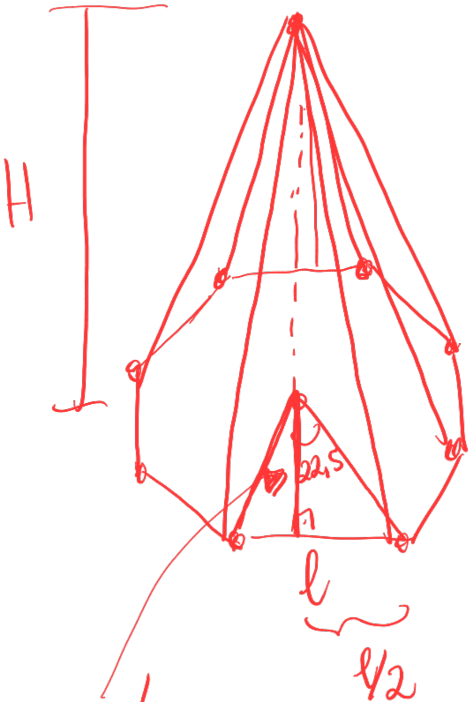
Como as pirâmides possuem a mesma altura e também áreas das bases congruentes, tendo em vista que

$$\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = (\sqrt[4]{3})^2,$$

então basta mostrarmos que qualquer plano α//β gera nos sólidos secções congruentes. Para isso, note que $\frac{T_i}{\sqrt{3}} = \frac{Q_i}{\sqrt{3}} = x^2$ (quadrado da razão de semelhança). Logo, as pirâmides possuem o mesmo volume.

03 (vale 2,0 pontos). A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida *a* do apótema da base. ($tg(22,5^\circ)=\sqrt{2}-1$)

RASCUNHO



$360^\circ \,\lfloor\!\underline{\;8\;}$ 45°

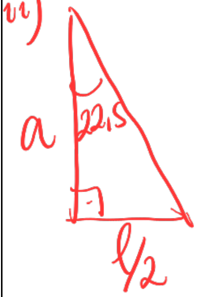
ap: apótema da pirâmide

Resposta: $\frac{16a^3}{3}(\sqrt{2}-1)$ u.v

Justificativa: Temos:

i) $V=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\cancel{8}\cdot\frac{\ell\cdot a}{\cancel{2}}}_{\text{área da base}}\cdot H=\boxed{\frac{4\cdot\ell\cdot a\cdot H}{3}}$

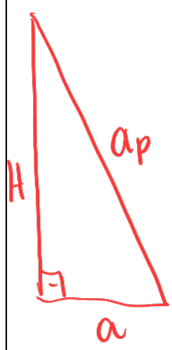
ii)



$\Rightarrow \boxed{2a\cdot tg\,22,5^\circ=\ell}$

iii) $\frac{A_{LAT}}{A_{BASE}}=\frac{\cancel{8}\cdot\frac{\cancel{\ell}\cdot ap}{\cancel{2}}}{\cancel{8}\cdot\frac{\cancel{\ell}\cdot a}{\cancel{2}}}=\sqrt{5}\Rightarrow \boxed{ap=\sqrt{5}a}$

iv)



$\Rightarrow H=\sqrt{5a^2-a^2}=2a$

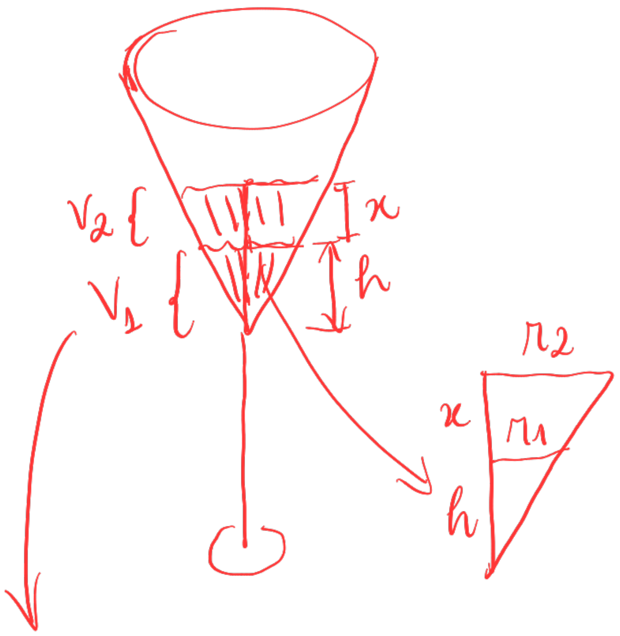
Logo,

$V=\frac{4}{3}\cdot 2a\,tg\,22,5^\circ\cdot a\cdot 2a$

$=\boxed{\frac{16a^3}{3}\cdot tg\,22,5^\circ}$ u.v.

04 (vale 2,0 pontos). Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, quanto subirá?

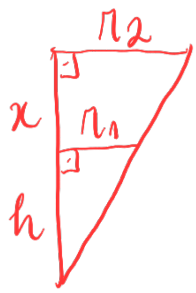
RASCUNHO



$V_1 = V_2$

Resposta: $(\sqrt[3]{2}-1)\cdot h$

Justificativa: Temos:



Por semelhança:

i) $$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x+h}{h}$$

ii) $$\frac{2\cancel{V_1}}{\cancel{V_1}} = \frac{V_1+V_2}{V_1} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{\pi} r_2^2\cdot(x+h)}{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{\pi} r_1^2 h}$$

$$2 = \left(\frac{x+h}{h}\right)^2\cdot\left(\frac{x+h}{h}\right)$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{x}{h}+1$$

$$\boxed{x = (\sqrt[3]{2}-1)\cdot h}$$

Ou ainda

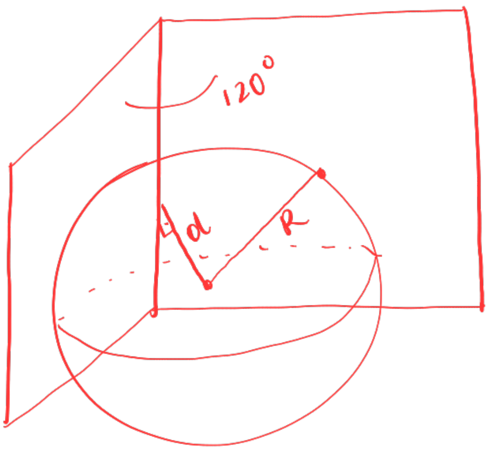
$$\frac{2\cancel{V_1}}{\cancel{V_1}} = \left(\frac{x+h}{h}\right)^3$$

cubo da razão de semelhança

$$x = (\sqrt[3]{2}-1)\cdot h.$$

05 (vale 2,0 pontos). Um diedro mede 120°. Qual a distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi$ cm³ que tangencia as faces do diedro?

RASCUNHO

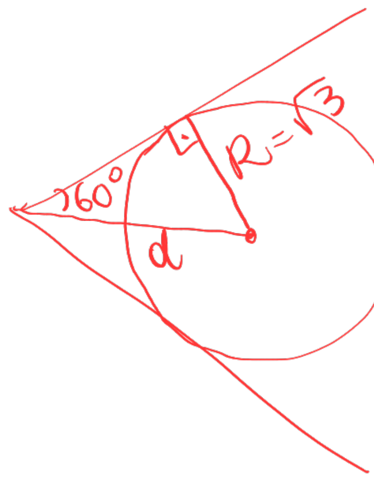


Resposta: 2 cm

Justificativa:

$$\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}R^3 = \cancel{4}\sqrt{3}\cancel{\pi} \Rightarrow R^3 = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{3}$$



$$\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{d} \Rightarrow d = 2$$