Universidade do Estado do Amazonas

Geometria II - ESN0440 – MV22

Professor Alessandro Monteiro

PF – Prova Final

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem seis problemas onde você deverá escolher apenas cinco deles valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Manaus, 23 de agosto de 2023

I. Questões	II. Respostas **à Caneta**

01 (vale 2,0 pontos).

a) Defina Tronco de Cone.

b) Considere que o balde abaixo seja um tronco de cone invertido com base menor igual a 8 cm. Encontre o seu volume.

a) Definição:

É o sólido limitado, num cone, entre a base e um plano paralelo ou não paralelo a base e secante a todas as geratrizes da superfície do cone.

b) Resposta: $304\pi\ cm^3$

Justificativa:

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2\right)$$

$$= \frac{12}{3}\left(\pi.4^2 + \sqrt{\pi.4^2.\pi.6^2} + \pi.6^2\right)$$

$$= 4\left(16\pi + 24\pi + 36\pi\right)$$

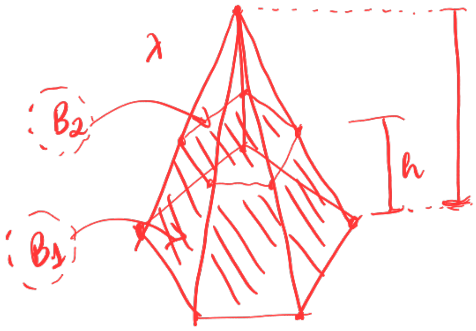
$$= 4 \cdot 76\pi$$

$$= 304\pi\ cm^3$$

02 (vale 2,0 pontos). Demonstre que o volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas B_1 e B_2 e altura h é dado por

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2\right).$$

Demonstração: Seja o tronco definido na pirâmide λ abaixo com bases B_1 e B_2 e altura h.



Temos:

(i) $$V_{TRONCO} = \frac{1}{3} B_1 \cdot H - \frac{1}{3} B_2 (H-h)$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\left[(B_1 - B_2)H + B_2 \cdot h\right]} \quad (I)$$

(ii) $$\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{H}{H-h}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{B_1}(H-h) = \sqrt{B_2} \cdot H$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{\sqrt{B_1} \cdot h}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}} \quad (II)$$

Subst. (II) em (I), temos também:

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3} h \left[\frac{(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})\cancel{(\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2})}}{\cancel{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}} \cdot \sqrt{B_1} + B_2\right]$$

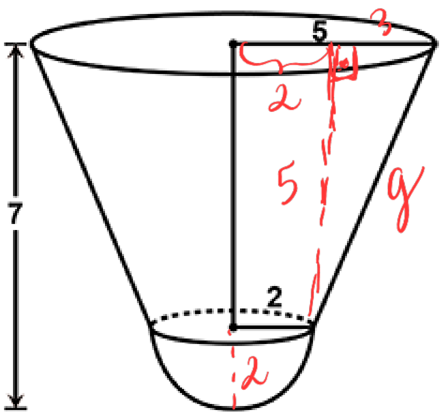
$$= \frac{1}{3} h \left(B_1 + \sqrt{B_2}\sqrt{B_1} + B_2\right).$$

Logo,

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3} h \left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right).$$

03 (vale 2,0 pontos). O Badmínton é um esporte dinâmico praticado entre dois ou quatro jogadores que é uma mistura de tênis e vôlei de praia. Ao invés de uma bola, é jogado com uma espécie de peteca, chamada de volante ou pena que deve passar por cima de uma rede. O plural de badmínton é badmíntones e o jogador de badmínton se chama badmintonista.

Suponha que uma peteca usada para jogar Badmínton tenha o formato de um tronco de cone montado em uma semiesfera, onde o raio da base maior do tronco seja igual a 5 cm, o raio da semiesfera seja igual a 2 cm e a altura da peteca seja igual a 7 cm, conforme a figura abaixo. Encontre a área da superfície externa da peteca.



Observação. Lembre-se de não considerar a área da base maior do tronco.

Resposta: $\pi(7\sqrt{34}+8)\,cm^2$

Justificativa: Sejam

S_E: a área da superf. externa da peteca

S_L = a área lateral do tronco

e

S_F = a área da superfície da esfera.

Temos:

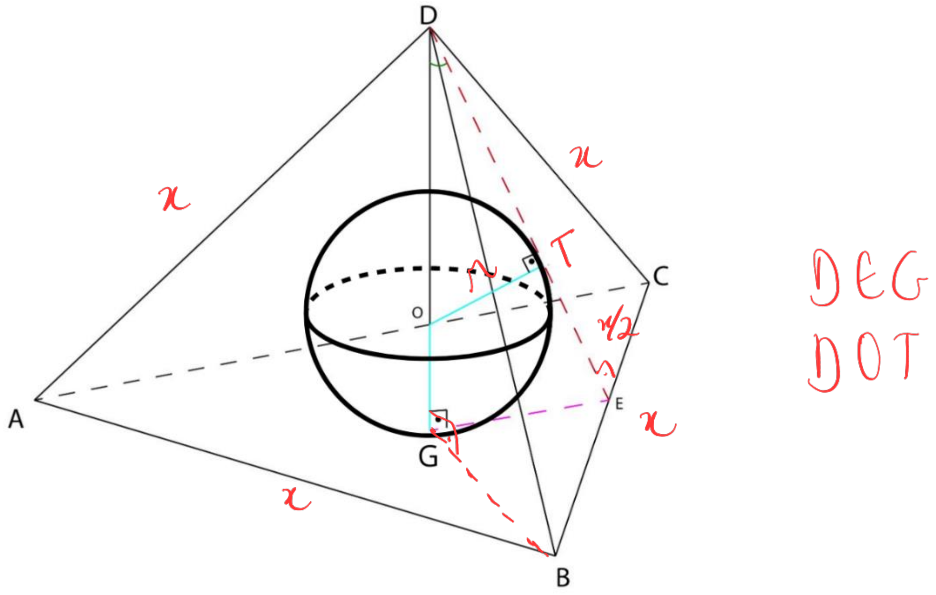
$$S_E = S_L + \frac{S_F}{2}$$

$$= \pi(5+2)g + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi 2^2}{\cancel{2}}$$

$$= 7\pi\sqrt{25+9} + 8\pi$$

$$= \pi(7\sqrt{34}+8)\,cm^2$$

04 (vale 2,0 pontos). Mostre que o volume V de um tetraedro regular é igual a $8r^3\sqrt{3}$ onde r é igual ao raio da esfera inscrita nele.



Demonstração:

Seja x e h as medidas, respectivamente, das arestas e da altura do tetraedro, temos que:

(i) No $\triangle DCE$: $\overline{DE} = \sqrt{x^2 - x^2/4} = \boxed{\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}$

(ii) Por $\triangle DEG \sim \triangle DOT$: $\dfrac{\frac{1}{3}\cancel{\frac{x\sqrt{3}}{2}}}{r} = \dfrac{\cancel{\frac{x\sqrt{3}}{2}}}{h-r} \Rightarrow h = 4r$

(iii) No $\triangle DBG$: $x^2 - \left(\dfrac{\cancel{2}}{3} x \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)^2 = (4r)^2 \Rightarrow x^2 = 3 \cdot 8r^2$

Logo,

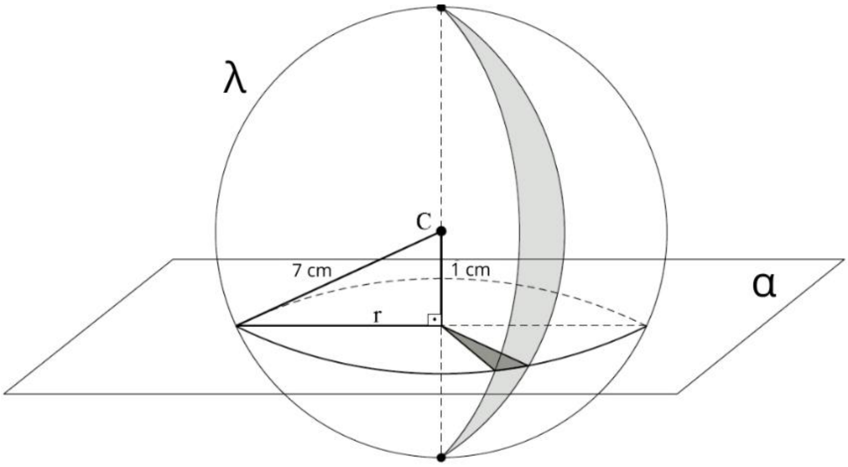
$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3} A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}r$$

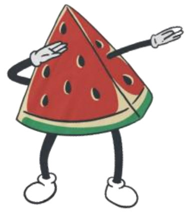
$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot 8r^2\sqrt{3} \cdot r$$

$$= 8r^3\sqrt{3} \text{ u.v.}$$

05 (vale 2,0 pontos). Seja uma esfera λ com centro em C e raio $r = 7\ cm$ e um plano α que dista 1 cm de C.

a) Encontre a área da intersecção do plano α com uma cunha esférica de 40º em λ que tenha aresta ortogonal a α.





b) Suponha a existência de um plano β paralelo e a 1 cm abaixo de α tal que exista entre eles um segmento esférico com base maior em α e base menor em β onde a base menor deste segmento ~~seja igual~~ aprox. ~~4~~ 5 cm. Encontre o volume do sólido de intersecção do segmento esférico com a cunha esférica definida em λ.

a) Resposta: $\frac{48\pi}{9}\ cm^2$

Justificativa:

$$\pi r^2 \text{ — } 360^\circ$$
$$\underbrace{A_{INT.}}_{\text{área de interseção}} \text{ — } 40^\circ$$

$$\Rightarrow A_{INT.} = \frac{\cancel{40}\pi r^2}{\cancel{360}_{\,9}} = \frac{\pi \cdot (7^2 - 1^2)}{9} = \frac{48\pi}{9}\ cm^2$$

b) Resposta: $\frac{110\pi}{27}\ cm^3$

Justificativa:

$$V_{SEGMENTO} = \frac{\pi \cdot 1}{6}\left(3 \cdot 48 + 3 \cdot 5^2 + 1^2\right) = \frac{220\pi}{6} = \frac{110\pi}{3}\ cm^3$$

$$\frac{110\pi}{3}\ cm^3 \text{ — } \cancel{360^\circ}^{\,9}$$
$$\underbrace{V_{INT}}_{\text{volume de interseção}} \text{ — } \cancel{40^\circ}$$

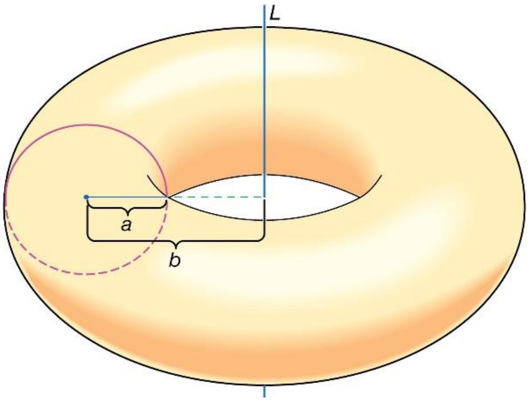
$$\Rightarrow \boxed{V_{INT} = \frac{110\pi}{27}\ cm^3}$$

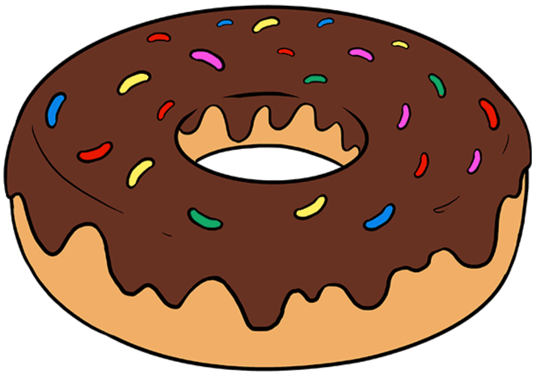
OBS.: Base menor de 4cm $\Rightarrow V_{INT} = \frac{193\pi}{54}\ cm^3$

SERÁ CONSIDERADA CORRETA.

06 (vale 2,0 pontos).

a) Prove que a área total e o volume do toro da figura da esquerda são dados respectivamente por $S = 4\pi^2 ab$ e $V = 2\pi^2 a^2 b$.

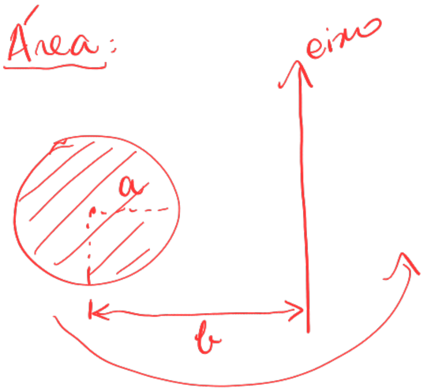




b) Suponha que o Donuts acima seja um toro semelhante ao que está ao seu lado onde $a = 1{,}5\ cm$ e $b = 4\ cm$. Encontre a área total e o volume do Donuts.

a) Demonstração:

Área:



$S = 2\pi \cdot (2\pi a) \cdot b$

$= 4\pi^2 ab$

Volume:

$V = 2\pi \cdot (\pi a^2) \cdot b$

$= 2\pi^2 a^2 \cdot b$

b) Respostas: $24\pi^2\ cm^2$ e $18\pi^2\ cm^3$

Justificativa: Pelo item anterior, temos:

i) $S = 4\pi^2 ab = 4\pi^2 (1{,}5) \cdot (4) = 24\pi^2\ cm^2$

ii) $V = 2\pi^2 a^2 b = 2\pi^2 \cdot (1{,}5)^2 \cdot (4) = 18\pi^2\ cm^3$