UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA
ESCOLA NORMAL SUPERIOR - ENS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DM

Disciplina: Matemática Elementar 2	**Valor Total: 10,0**
Prof.: Alessandro Monteiro	
Aluno(a): GABARITO MONTEIRO	
Prova Final	**Data: 04 de Dezembro de 2017**
Curso: Licenciatura em Matemática	**Período: 2017/2**

Critérios de Avaliação:

- Não é permitido **fazer perguntas** a respeito da resolução da prova ao professor.
- O Aluno só poderá entregar a prova **60 minutos** após seu início.
- Essa avaliação é **individual** e sem consulta.
- **Somente os espaços que sobram abaixo de cada questão e o verso desta folha poderão ser usados como rascunhos.**
- Todas as respostas devem ser colocadas **à caneta** na coluna 2 ao lado das perguntas.
- É proibido o uso de aparelhos **celulares ou similares**.
- Todo material do aluno é de uso **individual**, sendo proibido qualquer tipo de empréstimo.

QUESTÕES	RESPOSTAS À CANETA
01. (vale 1,0 ponto) Para x não nulo, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, a soma $1 + tgx + tg^2x + tg^3x + \ldots$ é igual a: a) $\frac{senx}{\cos x - senx}$ b) $\frac{\cos x}{\cos x + senx}$ c) $\frac{senx}{\cos x + senx}$ d) $\frac{\cos x}{\cos x - senx}$ Justifique!	**Resposta:** d) **Justificativa:** A soma $S = 1 + tgx + tg^2x + tg^3x + \ldots$ é uma PG infinita de razão $q = tgx$. Logo, $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-tgx} = \frac{1}{1-\frac{senx}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos x - senx}.$

02. (vale 2,5 pontos cada item) Resolva os três itens abaixo.

i) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ e $sen\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

ii) Dado o número complexo

$$z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

encontre o menor inteiro $n>0$ para o qual z^n seja real.

iii) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

Justifique!

Respostas:

i) $\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $sen\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ii) $n=8$

iii) $p(z)=z^8+256$

Justificativas:

i) Por ser $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, temos

$$\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{8}\right)=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{3\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

E pela relação fundamental podemos encontrar facilmente que $sen\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

ii) Note que

$$z=2\cos\frac{3\pi}{8}+2i\,sen\frac{3\pi}{8}$$

Assim, pela primeira fórmula de Moivre,

$$z^n=2^n\left(\cos\frac{3n\pi}{8}+i\,sen\frac{3n\pi}{8}\right)$$

Deste modo, se queremos que z^n seja real, então $sen\frac{3n\pi}{8}=0$. Logo, $n=8k,\ k\in\mathbb{Z}$. Portanto, o menor inteiro $n>0$ para o qual z^n seja real é $n=8$.

iii) Usando os itens anteriores, temos que

$$z^8=2^8\left(\cos 3\pi+i\,sen 3\pi\right)=2^8\left(-1\right)=-256.$$

E, obviamente, $z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ é raiz de

$$z^8=-256.$$

Como $p(z)=z^8+256$ não possui raiz real e tem coeficientes inteiros, então é uma resposta para este último item.

03. (vale 1,5 pontos) Resolva a equação

$$x^2 - x - \cos y + 1.25 = 0.$$

Justifique!

Resposta:

$$x = 0,5 \text{ e } y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Justificativa:

Temos que

$$x^2 - x - \cos y + 1.25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 0,25 + 1 - \cos y = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 0,5)^2 + 1 - \cos y = 0$$

E como $\cos y \le 1$. Isto é, $1 - \cos y \ge 0$, então deve ocorrer que

$$(x - 0,5)^2 = 0 \text{ e } 1 - \cos y = 0.$$

Ou seja,

$$x = 0,5 \text{ e } \cos y = 1.$$

Logo,

$$x = 0,5 \text{ e } y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$