Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

AP1

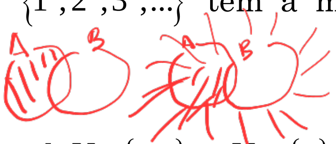
Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 14 de dezembro de 2023

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**
01 (vale 2,0 pontos). Se Alexandra vai assistir “Um Sonho de Natal”, Julia consegue cantar bem e Liz não sai sorrindo na foto. Liz saiu sorrindo na foto, então podemos afirmar que: P Q R ~R a) Julia conseguiu cantar bem. b) Alexandra não foi assistir “Um Sonho de Natal”. c) Julia não conseguiu cantar bem. d) Alexandra foi assistir “Um Sonho de Natal”. e) Alexandra foi assistir “Um Sonho de Natal” e Liz saiu sorrindo na foto.	**Resposta:** b) **Justificativa:** $P \Rightarrow (Q \wedge R) . \equiv . \sim P \vee (Q \wedge R)$ $\sim R$ $. \equiv . \sim P$
02 (vale 0,2 ponto cada item). Analise cada sentenças abaixo e classifique em **V**, se for verdadeira, e **F** se for falsa: **I.** Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ tem a mesma cardinalidade. **II.** $A - B = A \cap B^C$;  **III.** Sejam as funções: $d: \mathbb{N} - \{1,2\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $d(n)$ é o número de diagonais de um polígono de n lados, e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. Então as funções d e g são iguais; **IV.** A proposição $\sim(\sim A \vee B) \to (C \wedge \sim B)$ é equivalente a $\sim[(A \wedge \sim B) \wedge (B \vee \sim C)]$; $(\sim A \vee B) \vee (C \wedge$ **V.** Seja $f: A \to B$ uma função tal que para todo $x_1, x_2 \in A$, se $f(x_1) \neq f(x_2)$ então $x_1 \neq x_2$. Então f é injetiva; **VI.** $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}_+$, pois $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = e^x$ é uma bijeção; ? → zero $e^x = 0 \Rightarrow x = ?$ **VII.** Se A é finito e $2023 \notin A$ então $A \cup \{2023\}$ é finito e $card(A \cup \{2023\}) = card(A) + \cancel{2023}$. 1 **VIII.** O conjunto dos números algébricos é ~~não~~ enumerável; **IX.** Um conjunto X é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ for válido que $X \cap (a,b) \neq \varnothing$; **X.** Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \cancel{I_n} \to X$ para algum $\cancel{n \in \mathbb{N}}$. $\mathbb{N}$	**Respostas:** **I.** (V) **II.** (V) **III.** (F) **IV.** (V) **V.** (F) **VI.** (F) **VII.** (F) **VIII.** (F) **IX.** (V) **X.** (F) (I) Defina: $f: \mathbb{N} \to \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$, $f(n) = n^2$. (III) Não possuem mesmo domínio e contradomínio (IV) IDEM QUESTÃO 01 (V) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (VI) $0 \in \mathbb{R}_+$ e $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. (VII) $card(A \cup \{2023\}) = card A + 1$ (X) Finito ou $\exists f: \mathbb{N} \to X$ bijetiva.

03 (vale 2,0 pontos). Mostre, usando o Princípio de Indução Matemática, que a interseção de dois conjuntos finitos é finita.

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Demonstração: Seja a proposição $P(n)$: Se A e B são finitos então $A \cap B$ é finito. Primeiramente, se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ temos claramente que $A \cap B = \emptyset$ que é finito. Por outro lado, se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ então devem existir bijeções $f: I_n \to A$ e $g: I_m \to B$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Para este caso, apliquemos indução sobre $n \in \mathbb{N}$ com m fixo. Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois se $A = \{f(1)\}$ então ~~e~~ $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B = A$, e em ambos os casos temos que $A \cap B$ é finito. Suponhamos que $P(k)$ seja válida, $k \geq 1$. Então se for $A = \{f(1), f(2), \ldots, f(k), f(k+1)\}$ temos que

$$A \cap B = (\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\} \cap B) \cup (\{f(k+1)\} \cap B)$$

também é finito, uma vez que $\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\} \cap B$ é finito por hipótese de indução, e $\{f(k+1)\} \cap B$ (que é igual ao $\emptyset$ ou $f\{k+1\}$) também é finito. Logo, $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, podemos concluir que se A e B são finitos então $A \cap B$ é finito.

04 (vale 2,0 pontos). Sejam x, y, z e w elementos de um corpo ordenado K, onde y e w são diferentes de zero. Escolha duas entre as proposições abaixo e faça suas demonstrações:

a) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{w}=\dfrac{x\cdot w+y\cdot z}{y\cdot w}$.

b) $x<y$ e $y<z \Rightarrow x<z$.

c) $x\cdot y=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$.

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

($\Leftarrow$) VOLTA $x=0$ ou $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ e } y\neq 0 \Rightarrow xy=0 \\ x\neq 0 \text{ e } y=0 \Rightarrow xy=0 \\ x=0 \text{ e } y=0 \Rightarrow xy=0. \end{cases}$

($\Rightarrow$) IDA Suponha que $xy=0$ e $x\neq 0$. Precisamos mostrar que deve ocorrer $y=0$.

Vejamos:

$$y = 1\cdot y = (x^{-1}\cdot x)\cdot y$$
$$= x^{-1}\cdot(xy)$$
$$\overset{\text{hip.}}{=} x^{-1}\cdot 0$$
$$= 0.$$

Logo, $x=0$ ou $y=0$.

Demonstração (a):

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{w} = x\cdot y^{-1} + z\cdot w^{-1}$$
$$= x\cdot y^{-1}\cdot 1 + z\cdot w^{-1}\cdot 1$$
$$= x\cdot y^{-1}\cdot(w^{-1}w) + z\cdot w^{-1}\cdot(y^{-1}\cdot y)$$
$$= x\cdot(y^{-1}w^{-1})\cdot w + z\cdot(w^{-1}\cdot y^{-1})\cdot y$$
$$= x\cdot(y\cdot w)^{-1}\cdot w + z\cdot(y\cdot w)^{-1}\cdot y$$
$$= x\cdot w\cdot(y\cdot w)^{-1} + z\cdot y\cdot(y\cdot w)^{-1}$$
$$= x\cdot w\cdot(y\cdot w)^{-1} + y\cdot z(y\cdot w)^{-1}$$
$$= (x\cdot w + y\cdot z)(y\cdot w)^{-1}$$
$$= \frac{x\cdot w + y\cdot z}{y\cdot w}.$$

Demonstração (b):

$$x<y \text{ e } y<z \Rightarrow y-x,\ z-y \in P$$
$$\Rightarrow (z-y)+(y-x)\in P$$
$$\Rightarrow z+(-y+y)-x \in P$$
$$\Rightarrow z+0+(-x)\in P$$
$$\Rightarrow z-x \in P$$
$$\Rightarrow x<z.$$

P: conjunto dos números positivos do corpo ordenado K.

05 (vale 2,0 pontos). Considere que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e use este fato para mostrar que:

a) Se $n \in \mathbb{N}$ então $\dfrac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$.

b) Dado um número real $a > 0$, então existe um número irracional b tal que $0 < b < a$.

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Demonstração (a): Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Suponhamos por absurdo que $\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}$. Então devem existir $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$. Ou seja, $\sqrt{2} = \frac{n \cdot p}{q}$. Como $r = n \cdot p \in \mathbb{N}$ então $\sqrt{2} = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$. Uma contradição, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Logo $\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$.

Demonstração (b): Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. Pela propriedade arquimediana deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{a}$. Isto é, $a > \frac{\sqrt{2}}{n}$. Assim, tomando-se $b = \frac{\sqrt{2}}{n}$, como $\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$ pelo item (a), e $\frac{\sqrt{2}}{n} > 0$, então existe um b irracional tal que

$0 < b < a$.