Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MV

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 20 de fevereiro de 2024

I. Questões	II. Respostas **à Caneta**

01 (vale 2,0 pontos). Cinco suspeitos são presos em uma investigação criminal. Cada um deles faz uma declaração:

Sandra: "Somos todos inocentes."
Ivete: "Exatamente um de nós é inocente."
Jorge: "Exatamente um de nós é culpado."
Leonardo: "Pelo menos dois de nós são inocentes."
Irene: "Pelo menos dois de nós são culpados."

Acontece que os culpados mentiram, enquanto os inocentes contaram a verdade. Quantos dos cinco suspeitos são culpados?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resposta: C) 3

Justificativa:
Se Sandra fosse inocente então todos seriam inocentes, pois ela estaria falando a verdade quando declarou "Somos todos inocentes". Mas, Ivete não poderia ser inocente já que disse "Exatamente um de nós é inoc." Uma contradição. Assim, Sandra é culpada. Se Jorge fosse inocente então apenas a Sandra seria culpada já que falou "Exat. um de nós é culp." Neste caso, somente a Ivete seria inocente. Outra contradição. Logo, Jorge é culpado. Com isso, temos que Irene falou a verdade, e logo é inocente. O que implica em Ivete ser culpada e Leonardo ser inocente, pois se ele fosse culpado então Ivete estaria falando a verdade. Portanto, temos 3 culpados.

02 (vale 0,25 ponto cada item). Analise cada sentenças abaixo e classifique em **V**, se for verdadeira, e **F** se for falsa:

I. Uma sequência y_n é chamada de subsequência de x_n se existe uma sequência estritamente crescente k_n de números reais tal que $y_n = x_{k_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

II. A sequência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ é decrescente;

III. A sequência $\left\{\dfrac{10^n}{2n^2}\right\}$ não é monótona;

IV. $\lim x_n = +\infty \iff \forall\, M > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow x_n > M$.

V. Toda sequência monótona é convergente;

VI. Se $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0$ então $\sum a_n$ é convergente;

VII. A p-série $\sum\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ é divergente quando $p = 7$;

VIII. A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a sequência de somas parciais s_n é convergente.

Respostas:

I. (V)
II. (F)
III. (F)
IV. (V)
V. (F)
VI. (F)
VII. (F)
VIII. (V)

(II) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+1)(n+2)} > 0$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n$.

(III) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{10^{n+1}}{2(n+1)^2} \cdot \dfrac{2n^2}{10^n} = \dfrac{10n^2}{(n+1)^2} \geq 1$

(!) $\underbrace{10n^2 \geq n^2 + 2n + 1}_{V} \iff \underbrace{9n^2 - 2n - 1 \geq 0}_{V}$

(VI) $\lim \frac{1}{n} = 0$ e $\sum \frac{1}{n}$ é diverg.

(VII) $p \geq 1 \Rightarrow$ CONVERGENTE.

03 (vale 2,0 pontos). Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que: $$\sup(\alpha A) = \begin{cases} \alpha \sup A, se\ \alpha \geq 0 \\ \alpha \inf A, se\ \alpha < 0. \end{cases}$$ **Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!**	**Demonstração:** Seja $M = \sup A$ e $L = \inf A$. Se $\alpha = 0$ então não há o que demonstrar. Se $\alpha > 0$ então $M \geq a$ $(a \in A)$ se, e somente se, $\alpha . M \geq \alpha . a$. Assim, $\alpha . M$ é cota superior para $\alpha . A$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, então deve existir $a \in A$ tal que $M - \frac{\varepsilon}{\alpha} < a$. Com isso, $\alpha M - \varepsilon < \alpha . a$ para algum $\alpha . a \in \alpha A$. Assim, αM é também a menor das cotas superiores para $\alpha . A$. Logo, $\alpha . \sup A = \sup(\alpha A)$ quando $\alpha \geq 0$. Por outro lado, se $\alpha < 0$ temos que $L \leq a$ com $a \in A$ se, e somente se, $\alpha . L \geq \alpha a$. O que mostra ser $\alpha . L$ cota superior para $\alpha . A$. Além disso, se $L + \frac{\varepsilon}{(-\alpha)} > a$ para algum $a \in A$ então $\alpha L - \varepsilon < \alpha a$ para algum $\alpha . a \in \alpha A$. Donde podemos concluir que $\alpha . \inf A = \sup(\alpha . A)$ quando $\alpha < 0$. Portanto, $$\sup(\alpha A) = \begin{cases} \alpha \sup A, \text{ se } \alpha \geq 0 \\ \alpha \inf A, \text{ se } \alpha < 0. \end{cases}$$

04 (vale 2,0 pontos). Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente e limitada superiormente. Mostre que $$\lim_{x\to\infty}(x_n)=\sup\{x_n;n\in\mathbb{N}\}.$$ **Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!**	**Demonstração:** Consideremos o conjunto não vazio $\{x_n; n\in\mathbb{N}\}$. Por hipótese temos que $\{x_n; n\in\mathbb{N}\}$ é limitado superiormente, deste modo existe o $\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}$. Tomando-se $\varepsilon>0$ qualquer, temos também que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}-\varepsilon<x_{n_0}$. Assim, como x_n é crescente, podemos escrever: $\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}-\varepsilon<x_{n_0}<x_{n_0+1}<x_{n_0+2}<\dots$, Ou seja, $$\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}-\varepsilon<x_n,\ \forall\ n\geq n_0.$$ Logo, $$\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}-\varepsilon<x_n\leq\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}<\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}+\varepsilon$$ para todo $n\geq n_0$. Portanto, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq n_0\Rightarrow|x_n-\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}|<\varepsilon$. Isto é, $$\lim_{n\to+\infty}x_n=\sup\{x_n; n\in\mathbb{N}\}.$$

05 (vale 2,0 pontos). Use o Teste da Integral para concluir se as séries abaixo convergem ou divergem: **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2024}}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$. **Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!**	**Resposta (a):** CONVERGE. **Justificativa:** ⊙ $f(x) = \frac{1}{x^{2024}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2024}{x^{2025}} < 0 \Rightarrow f$ é decresc. ⊙ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2024}}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{x^{-2023}}{2023}\Big\|_1^A\right)$ $= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2023\cdot A^{2023}} + \frac{1}{2023}\right)$ $= 1/2023.$
	Resposta (b): CONVERGE. **Justificativa:** ⊙ $f(x) = x\cdot e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x).e^{-x^2}$ $= e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$ p/ $x \geq 1$ ⊙ $\int_1^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(\int_1^A x\cdot e^{-x^2}\,dx\right)$ $= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-1}^{-A^2} e^{u}\,du\right)$ $= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-A^2} - e^{-1}\right)\right]$ $= \frac{1}{2e}.$