Universidade do Estado do Amazonas

Cálculo I – ESN0282 – 2023/2 - Vespertino

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existe cinco problemas, valendo um total de dez pontos. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 16 de fevereiro de 2024

I. Questões	II. Respostas **à Caneta**

01 (Vale 3,0 pontos) Dê uma definição para derivada de função em um ponto $a \in D(f)$. **Encontre** $\frac{dy}{dx}$ para as funções definidas abaixo:

a) $y = x^{2024} - e^{x^{2024}} + sen2024$.

b) $\ln(x+y) = xy - y^3$.

c) $y = \dfrac{\log_7(x^2 - 3x + 8)}{\sec(x^2 + 7x)}$.

Justifique!

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Definição:

Seja f uma função e $a \in D(f)$. Dizemos que f é derivável em a (e escrevemos $f'(a)$) quando o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

existe e é finito.

Respostas (a):

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2024x^{2023} - 2024x^{2023} \cdot e^{x^{2024}}}.$$

Respostas (b):

$$\frac{1}{x+y} \cdot (1 + y') = 1 \cdot y + x \cdot y' - 3y^2 \cdot y'$$

$$\frac{1}{x+y} + y = y'\left(x - 3y^2 - \frac{1}{x+y}\right)$$

$$\boxed{y' = \frac{\frac{1}{x+y} + y}{x - 3y^2 - \frac{1}{x+y}}}.$$

Respostas (c):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{(x^2-3x+8)\cdot \ln 7} \cdot (2x-3) \cdot \sec(x^2+7x) - \log_7(x^2-3x+8) \cdot \sec(x^2+7x) \cdot tg(x^2+7x) \cdot (2x+7)}{\sec^2(x^2+7x)}$$

#

02 (vale 1,0 pontos) Classifique em **V** (verdadeira) e **F** (falsa) cada uma das proposições abaixo:

I. O Teorema do Valor Médio afirma que se f é uma função contínua em [a,b] e derivável em (a,b) então existe c pertencente a (a,b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

II. O somatório de um número real positivo com o inverso de seu quadrado é mínimo desde que este número seja igual a $\sqrt[3]{2}$.

III. O Teorema de Rolle afirma que se f é uma função contínua em [a,b], derivável em]a,b[e $f(a) = f(b)$ então existe c pertencente a]a,b[tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

IV. Toda função contínua é derivável.

Respostas:

I. (√)

II. (√)

III. (√) $\rightsquigarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = \dfrac{f(a) - f(a)}{b-a} = 0.$

IV. (F) $\rightsquigarrow$ DERIV. $\Rightarrow$ CONT.

Observação: No item (III) irei aceitar as duas respostas.

03 (vale 2,0 pontos) Utilizando **a Regra de L'Hospital**. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{x} \right) \right)$

Resposta (a) = 1.

Justificativa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Resposta (b) = 1/2

Justificativa:

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \Bigg\} \text{ ind. do tipo } \frac{0}{0}$$

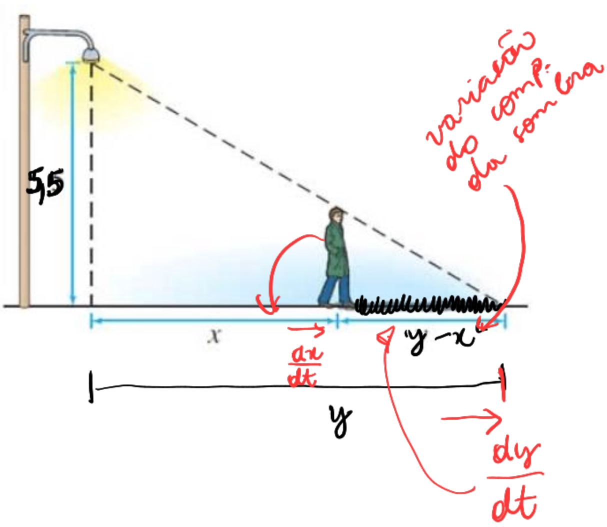
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + 1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2 \cdot \left(1/x^3\right)} \quad \begin{matrix} \cdot(-x^3) \\ \cdot(-x^3) \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x - \frac{x}{1 + 1/x}}{2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{1 + 1/x \to 0}}{2} = \frac{1}{2}.$$

04 (vale 2,0 pontos). Uma pessoa de 1,8 metros de altura se afasta de um poste de luz de 5,5 metros, ao longo de uma calçada plana a noite, a velocidade de 1,5 m/s. Quão rápido a ponta de sua sombra está movendo-se pela calçada?

Justifique!



Resposta $\cong$ 2,2 m/s

Justificativa: Temos que:

$$\frac{5,5}{1,8} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow 5,5y - 5,5x = 1,8y$$

$$\Rightarrow 3,7y = 5,5x$$

$$\Rightarrow y = \frac{5,5}{3,7}x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{55}{37}\frac{dx}{dt}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{55}{37}\cdot 1,5 \cong 2,2 \text{ m/s}.$$

05 (vale 2,0 pontos). Suponha que f seja uma função real tal que $f'(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ e $f(1) = \frac{1}{2}$. Encontre $f(x)$.

Justifique!

Resposta: f(x) = $\operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Justificativa: Como

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \int f'(x)\,dx$$

então

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} + C.$$

Se $f(1) = \frac{1}{2}$ então $\cancel{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{1}{2}} + C$.

Logo, $C = -\frac{\pi}{4}$.

Portanto, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}$.