Universidade do Estado do Amazonas

Problemas de Matemática – ESN0828 – 2023/2 - Vespertino

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem quatro problemas valendo um total de cinco pontos, onde você deverá **escolher apenas três** deles. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

Manaus, 16 de fevereiro de 2024

I. Questões	II. Respostas **à Caneta**
01 (Vale 5/3 ponto) **a)** Prove que se n é um inteiro positivo e $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1+nx$. **b)** Mostre que $2022^{2025} + 2023^{2025} < 2024^{2025}$. **Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!**	**a) Demonstração:** Seja a proposição $P(n): (1+x)^n \geq 1+nx, \ n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x > -1.$ Temos que: (i) $P(1)$ é verdadeira, pois $(1+x)^1 = (1+x) \geq 1 + 1.x.$ (ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1), \ k \geq 1$, pois $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x)$ $\overset{hip.}{\geq} (1+kx)(1+x)$ $= 1 + x + kx + kx^2$ $\overset{kx^2 \geq 0}{\geq} 1 + x + kx$ $= 1 + (k+1).x.$ Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro positivo e $x > -1$.
	b) Demonstração: Como $2022^{2025} + 2023^{2025} < 2023^{2025} + 2023^{2025}$ e $\left(\frac{2024}{2023}\right)^{2025} = \left(1 + \frac{1}{2023}\right)^{2025} \geq 1 + \frac{2025}{2023} > 2$ então $2022^{2025} + 2023^{2025} < 2.2023^{2025}$ e $2024^{2025} > 2.2023^{2025}.$ Logo, $2022^{2025} + 2023^{2025} < 2024^{2025}.$

02. (Vale 5/3 ponto)

a) Enuncie o Teorema do Valor Médio.

b) Suponha que a função $f(x)$ seja contínua e derivável em [6,15]. Suponha também que $f(6)=-2$ e $f'(x)\leq 10$ para todo x. Encontre o maior valor possível para $f(15)$.

Justifique!

Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!

a) Resposta:

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) então existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

b) Resposta: 88.

Justificativa:

Pelo T.V.M, deve existir $c\in(6,15)$ tal que $f'(c)=\frac{f(15)-(-2)}{15-6}$. Ou seja, $f'(c)=\frac{f(15)+2}{9}$. Como $f'(x)\leq 10$ para todo x, então $10\geq\frac{f(15)+2}{9}$.

Logo, $f(15)\leq 88$.

03. (Vale 5/3 ponto) Deseja-se pintar a superfície externa e lateral de um monumento em forma de um paraboloide, que pode ser descrita pela equação $z = x^2 + y^2$, situada na região do espaço de coordenadas cartesianas (x, y, z) dada pela condição $z \leq 9$. Os eixos coordenados estão dimensionados em metros e gasta-se um litro e meio de tinta a cada metro quadrado de área da superfície a ser pintada. A quantidade de tinta, em litros, necessária para se pintar a superfície lateral do monumento é dada pela integral dupla: a) $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)\,dxdy$ b) $6\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)\,dxdy$ c) $4\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta$ d) $6\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta$ e) $6\int_0^{\pi/2} \int_{-3}^3 \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta$ **Justifique!**	**Resposta:** D **Justificativa:** Temos: $A_s = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dA$ $= \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dA$ $= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)}\, rdrd\theta.$ Logo, a quantidade de tinta, em litros, necessária para pintar é igual a $1{,}5 \cdot A_s = 1{,}5 \cdot 4 \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, rdrd\theta$ $= 6\cdot \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, rdrd\theta.$

04. (Vale 5/3 ponto) Considerando $p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 2$, $q(x) = x^4 - 16$ e definindo os anéis quocientes

$$A_1 = Q[x]/<p(x)> \text{ e } A_2 = Q[x]/<q(x)>,$$

em que $Q[x]$ denota o anel de polinômios sobre Q na variável x e $<f(x)>$ representa o ideal de $Q[x]$ gerado pelo polinômio $f(x)$, assinale a opção correta:

a) De acordo com o critério de Eisenstein, os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são irredutíveis.

b) O ideal $<q(x)>$, gerado pelo polinômio $q(x)$, é maximal.

c) Os anéis quocientes A_1 e A_2 são corpos.

d) Somente o anel quociente A_1 é corpo.

e) O anel quociente A_1 admite divisores de zero.

Justifique!

Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!

Resposta: D

Justificativa:

⊙ O polinômio $p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 2$ é irredutível pelo critério de Eisenstein para $p = 2$, mas $q(x)$ é claramente redutível em $\mathbb{Q}[x]$;

⊙ $<q(x)>$ não é maximal, pois $q(x)$ é redutível;

⊙ $<q(x)>$ não é maximal $\Rightarrow$ A_2 não é corpo;

⊙ A_1 é corpo $\Rightarrow$ não admite divisores de zero.