Universidade do Estado do Amazonas

Cálculo I – ESN0282 – 2023/2 - Vespertino

Professor Alessandro Monteiro

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem quatro problemas valendo um total de dez pontos. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

Manaus, 15 de Dezembro de 2023

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**
01 (Vale 2,5 pontos) Resolva cada um dos limites dados abaixo. **JUSTIFIQUE!**	**Resposta (a):** $-1/3$.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5}$.

b) $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{u-7}{\sqrt{u}\left(\sqrt{u}-\sqrt{7}\right)}$.

c) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2+2x+8}{|-x+4|}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{senx}-\cot gx\right)$.

e) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2023^h-1}{h}$.

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Resposta (a): $-1/3$.

Justificativa:

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x+5)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Resposta (b): $+\infty$

Justificativa:

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{(\sqrt{u}-\sqrt{7})}(\sqrt{u}+\sqrt{7})}{\sqrt{u}\,\cancel{(\sqrt{u}-\sqrt{7})}} = \frac{\sqrt{7}}{\underbrace{\to 0}_{\text{com valores positivos}}} = +\infty$$

Resposta (c): $+\infty$

Justificativa:

$$= \lim_{x\to 4^+}\frac{x^2+2x+8}{x-4} = \frac{32}{\underbrace{\to 0}_{\text{com valores positivos}}} = +\infty$$

Resposta (d): 0.

Justificativa:

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \right) \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^{\cancel{2}}}{\cancel{\operatorname{sen} x}\,(1 + \cos x)} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

Resposta (e): $\ln 2023$.

Justificativa:

$$= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{1}{\ln 2023} \cdot \ln(u+1)}$$

$$= (\ln 2023) \cdot \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} \right)}$$

$$= (\ln 2023) \cdot \frac{1}{\cancel{\ln e} \to 1} = \ln 2023.$$

02 (vale 2,5 pontos) Seja f uma função real tal que:

i) f é contínua em $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$;

ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-2$ e $\lim_{x\to -1} f(x)=2$;

iii) $f(-1)=3$;

iv) $y=3$ é uma assíntota horizontal;

v) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$.

Classifique em **V (verdadeira)** e **F (Falsa)** cada proposição abaixo:

1. A função f é contínua em $x=-1$.

2. $\lim_{x\to -\infty} f(x)=3$.

3. A reta $y=2$ é uma assíntota vertical.

4. O $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

5. A reta $x=-2$ é uma assíntota horizontal.

Justifique!

Respostas:

1. (   ) **V**   (X) **F**

Justificativa: Pois,

$\lim_{x\to -1} f(x) = 2 \neq 3 = f(-1)$

2. (X) **V**   (   ) **F**

Justificativa:

Sim, pois $y=3$ é uma A.H e também $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-2$.

3. (   ) **V**   (X) **F**

Justificativa:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty \Rightarrow x=2$ é uma A.V.

4. (X) **V**   (   ) **F**

Justificativa:

Sim, pois $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$.

5. (   ) **V**   (X) **F**

Justificativa:

$\lim_{x\to \infty} f(x) = -2 \Rightarrow y=-2$ é uma A.H.

03. (Vale 2,0 pontos) Mostre que a equação $x^{2024}+3x+1=0$ possui uma raiz negativa.

Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!

Respostas:

A função $f: [-1,0] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{2024} + 3x + 1$ é contínua e $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(0)$. Logo, pelo T.V.I, deve existir $c \in (-1,0)$ tal que $f(c)=0$. Isto é, existe um número real c negativo tal que $c^{2024} + 3.c + 1 = 0$.

04. (Vale 3,0 pontos)

a) Defina formalmente Função Contínua. em um ponto a.

b) Use a definição "ε,δ" do item anterior para mostrar que a função $f:\mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{x}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!

a) Definição (Formal):

Uma função $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in A = D(f)$ quando:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0;\ a \in A$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Utilize os espaços abaixo das questões apenas para rascunhos!

Rascunho:

Em $x=0$:

$|\sqrt{x}-\sqrt{0}|<\varepsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x}|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\varepsilon^2$

Em $x>0$:

$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$

$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$

$\delta=\varepsilon\sqrt{a}$

b) Demonstração:

(i) Em $a=0$:

Seja $\varepsilon>0$ qualquer. Escolhendo-se $\delta=\varepsilon^2>0$, temos:

$|x-0|<\delta \Rightarrow |x|<\varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x}|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(0)|<\varepsilon.$

(ii) Em $a>0$:

Seja $\varepsilon>0$ qualquer. Tomando-se $\delta=\varepsilon\sqrt{a}>0$, temos:

$|x-a|<\delta \Rightarrow |x-a|<\varepsilon\sqrt{a}$

$\Rightarrow \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{\cancel{x-a}}{\cancel{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$

Logo, por (i) e (ii), f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}_+$.