

QUESTÃO 01:

Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}x$ é contínua.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ um número real arbitrário. Tomando-se $\delta = \varepsilon > 0$ temos que se $a \in D(f)$ então

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |x - a| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| 2 \left(\frac{x - a}{2} \right) \right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| 2 \text{sen} \left(\frac{x - a}{2} \right) \right| < \varepsilon, \text{ pois } \left| \text{sen} \left(\frac{x - a}{2} \right) \right| \leq \left| \left(\frac{x - a}{2} \right) \right| \\ &\Rightarrow \left| 2 \text{sen} \left(\frac{x - a}{2} \right) \cos \left(\frac{x + a}{2} \right) \right| < \varepsilon, \text{ pois } \left| \cos \left(\frac{x + a}{2} \right) \right| \leq 1 \\ &\Rightarrow |\text{sen}x - \text{sen}a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = \text{sen}x$ é contínua em qualquer ponto $a \in D(f)$. Portanto, $f(x) = \text{sen}x$ é contínua.