**QUESTÃO 05:**

a) Dê uma definição para integral indefinida a partir do conceito de antiderivadas (primitivas).

b) Enuncie o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo.

c) Seja $f$ uma função ímpar e contínua em $[-r,r]$, $r>0$, mostre que $\int_{-r}^{r} f(x)\ dx = 0.$

**Solução:**

**a)** Seja $f$ uma função contínua em um intervalo $I$. O conjunto formado por todas as antiderivadas (primitivas) de $f$ em $I$ é chamado de integral indefinida de $f$. Este conjunto é denotado por $\int f(x)\ dx$, e lido como integral indefinida de $f(x)$ em relação a $x$, por conta da diferencial $dx$. Escrevemos:

$$\int f(x)\ dx = F(x)+C,\ onde\ \ C\in\mathbb{R}\ \text{ e }\ (F(x)+C)' = f(x).$$

**b**) Se $f$ for integrável em $[a,b]$ e se $F$ for uma primitiva de $f$ em $[a,b]$ então $\int_{a}^{b} f(x)\ dx = F(b) - F(a).$

**c)** Fazendo-se $u=-x$ temos que

$$\begin{cases} dx = -du \\ x=-r \Rightarrow u=r \\ x=r \Rightarrow u=-r \\ f(-u) = -f(u),\ \text{pois } f \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim,

$$\int_{-r}^{r} f(x)\ dx = \int_{r}^{-r} f(-u)\ (-du) = \int_{r}^{-r} f(u)\ du = -\int_{-r}^{r} f(u)\ du.$$

Como $\int_{-r}^{r} f(x)\ dx = \int_{-r}^{r} f(u)\ du$ então $\int_{-r}^{r} f(x)\ dx = -\int_{-r}^{r} f(x)\ dx$. Logo, $\int_{-r}^{r} f(x)\ dx = 0.$