Universidade do Estado do Amazonas

Cálculo 1

Professor Alessandro Monteiro

Monitoria – 2024/2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existe cinco problemas, valendo um total de dez pontos. **Você não pode fazer perguntas a respeito da resolução da prova ao professor**, nem usar livros, anotações, folhas de rascunhos, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Use o espaço abaixo das questões para pequenos rascunhos.** Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.

As respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 9 de julho de 2024

I. Questões	II. Respostas à **Caneta**
01 (Vale 1,5 ponto) Classifique em **V** (verdadeira) ou **F** (falsa) cada uma das proposições baixo: **I.** Apesar do limite de $f:(-\infty,3]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2+\sqrt{3-x}$ quando $x\to 3^{+}$ não existir, a função f é contínua. **II.** Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=d$. **III.** Toda função derivável ~~contínua~~ é também ~~derivável~~; contínua **IV.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $\mathbb{R}$. Se f é par então f' é ímpar. **V.** Sejam $f,g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ funções tais que $f(x)=f(-x)$ e $g(x)=-g(-x)$ para todo $x\in[-a,a]$. Então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ e $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$. **Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!**	**Resposta:** **I.** (V) **II.** (V) **III.** (F) **IV.** (V) **V.** (V)

02 (vale 2,0 pontos) **a) Defina** Limites de Funções. **b) Use** o fato de ser $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{senx}{x} = 1$ quando $x > 0$ para mostrar algebricamente que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{senx}{x} = 1$ se $x < 0$. **Justifique!**	**(a) Definição:** (INFORMAL) Seja $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Se pudermos tornar f arbitrariamente próximo de L tomando-se x suficientemente próximo de a, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito de a, então o limite de $f(x)$ quando x tende para a é L. Escrevemos: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.
	(b) Demonstração: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} x}{-x}$ $= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}$, pois $\operatorname{sen} x$ é ímpar $\overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u}$ $= 1$.

03 (vale 2,5 pontos) Seja f uma função real tal que:

i) f é contínua em $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$;

ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$ e $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$;

iii) $f(-1)=3$;

iv) $y=3$ é uma assíntota horizontal;

v) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

Classifique em **V (verdadeira)** e **F (Falsa)** cada proposição abaixo:

1. A função f é contínua em $x=-1$.

2. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

3. A reta $y=2$ é uma assíntota vertical.

4. O $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

5. A reta $x=-2$ é uma assíntota horizontal.

Justifique!

Respostas:

1. (   ) **V**   (X) **F**

Justificativa:

Pois, $\underbrace{\lim_{x\to -1} f(x) = 2}_{(ii)} \neq \underbrace{3 = f(-1)}_{(iii)}$.

2. (X) **V**   (   ) **F**

Justificativa:

Pois, $\overbrace{y=3 \text{ é uma assíntota horizontal}}^{(iv)}$ e também $\underbrace{\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2}_{(ii)}$.

3. (   ) **V**   (X) **F**

Justificativa:

$\underbrace{\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty}_{(v)} \Rightarrow x = 2$ é uma A.V

4. (X) **V**   (   ) **F**

Justificativa:

Sim, pois $\underbrace{\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty}_{(v)}$ e $\underbrace{\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty}_{(v)}$

5. (   ) **V**   (X) **F**

Justificativa:

$\underbrace{\lim_{x\to \infty} f(x) = -2}_{(ii)} \Rightarrow y = -2$ é uma A.H

04 (vale 2,0 pontos).

a) Defina Função Derivável em um ponto a de seu domínio.;

b) Use a definição do item anterior para mostrar que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|2024x|$ não é derivável em $x=0$.

Justifique!

(a) Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Dizemos que f é derivável num ponto $a \in I$ quando o limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, isto é, quando é igual a algum número real.

(b) ~~Resposta:~~

Justificativa: Seja a função $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2024x|$. Como o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|2024(0+h)|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2024|h|}{h}$$

não existe, uma vez que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{2024|h|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2024(-h)}{h} = -2024 \quad e$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{2024|h|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2024h}{h} = 2024,$$

então f não é derivável em $x=0$.

Nota: A função f é contínua em $x=0$.
Lembre-se que:

$$\begin{cases} f \text{ é DERIVÁVEL} \Rightarrow f \text{ é CONTÍNUA} \\ f \text{ NÃO É CONTÍNUA} \Rightarrow f \text{ NÃO É DERIV.} \end{cases}$$

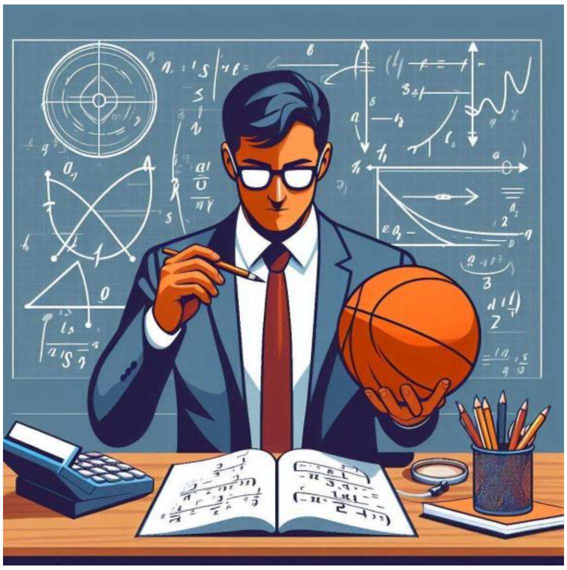
05 (vale 2,0 pontos). Escolha apenas dois itens e resolva:

a) $\int \text{cotg } x \, dx$;

b) $\int x^4 e^x \, dx$

c) Seja a função real definida por $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule o comprimento do arco do gráfico de f no intervalo [0,1].

d) Use integrais para mostrar que o volume de uma bola de raio r é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$. Para resolver este problema, primeiramente desenhe uma região plana que, ao girar em torno do eixo x, gerará a bola. Para isso, lembre-se que a equação de uma circunferência de raio r centrada na origem é dada por $x^2 + y^2 = r^2$. Assim, você encontrará $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e pode trabalhar com o semicírculo no intervalo [-r,r] ou com a quarta parte do círculo no intervalo [0,r]. Finalmente, integre de acordo com as fórmulas de volume de rotação que estudou em Cálculo 1.



Justifique!

item (a **):**

Resposta: $\ln|\operatorname{sen} x| + C$

Justificativa:

$$\int \text{cotg}\, x \, dx = \int \frac{\overbrace{\cos x}^{du}}{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{u}} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$
$$= \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

b)

$$\int x^4 e^x dx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

	D	I
+	x^4	e^x
−	$4x^3$	e^x
+	$12x^2$	e^x
−	$24x$	e^x
+	24	e^x

$\frac{3}{2} - 1$

$\cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} x^{1/2}$

item (c **):**

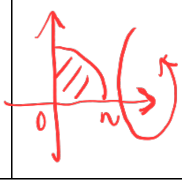
Resposta: $\frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ u.c.

Justificativa

$$\int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx = \frac{1}{9}\int_1^{10} \sqrt{u}\, du =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3} u^{3/2}\right)\Bigg|_1^{10} = \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1) \text{ u.c.}$$

d)

$$V_{BOLA} = 2 \cdot \left(\pi \int_0^r [f(x)]^2 dx\right)$$
$$= 2\pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r$$



$$= 2\pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ u.v.}$$